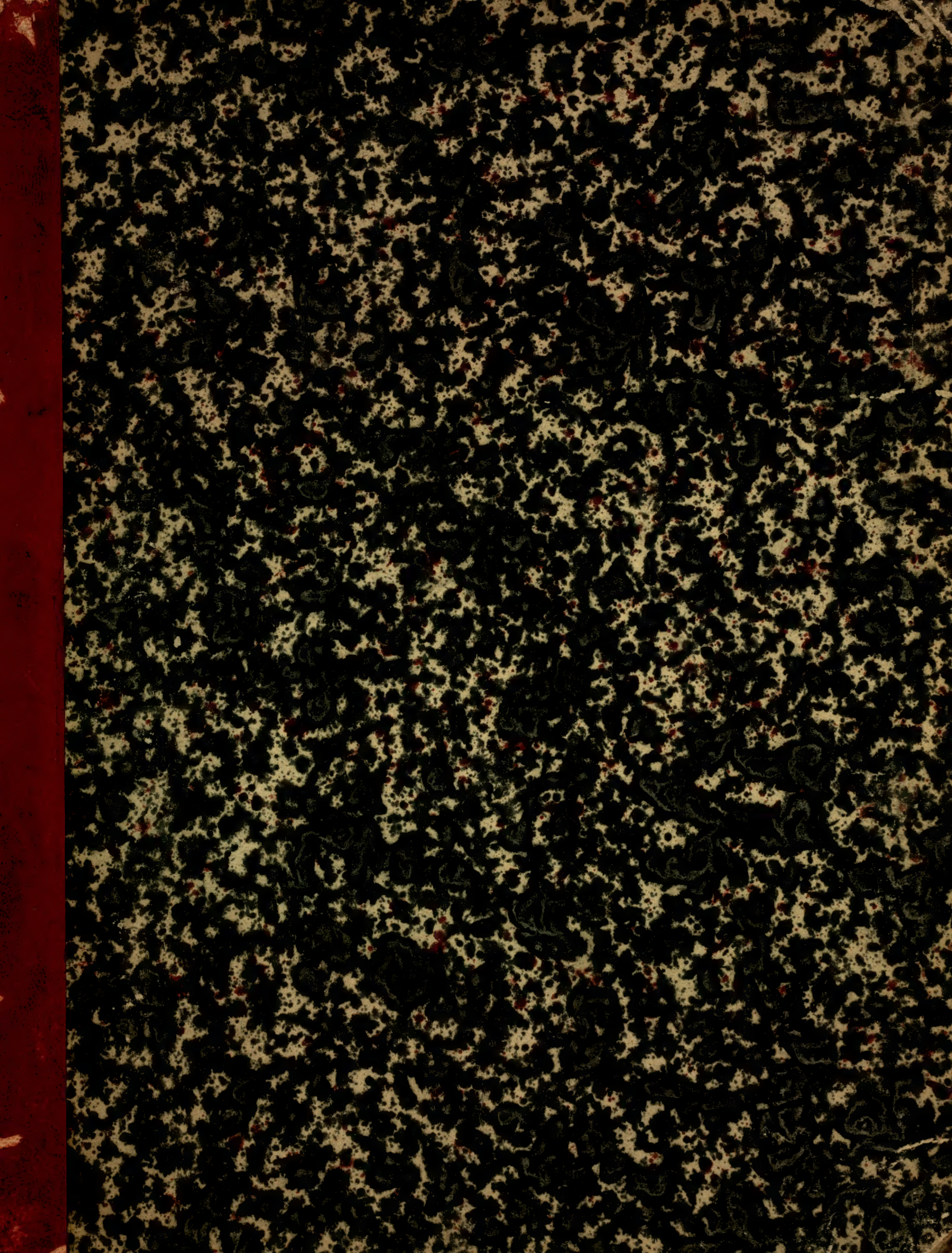


Ecole Polytechnique.

1re Division.

1893-1894.



Cours d'Analyse.

(Rédaction des Elèves).

Mr Bertrand, Professeur.

2e Année.

1re Leçon.

Différentiation et Intégration des Intégrales définies.

Définitions. Soit une fonction φ telle que

$$d\,\varphi(x) = F(x)\,dx$$

On dit que la fonction φ est l'intégrale indéfinie de la différentielle $F(x)\,dx$ et l'on écrit

$$\int F(x)\,dx = \varphi(x)$$

La fonction φ étant définie par sa dérivée, $F(x)$ ne l'est évidemment qu'à une constante près.

Intégrale définie. On appelle intégrale définie de la fonction $F(x)$ entre a et b, et on représente par $\int_a^b F(x)\,dx$, l'aire comprise entre la courbe $y = F(x)$, l'axe des x et les ordonnées $x = a$ $x = b$. C'est encore la limite vers laquelle tend une somme d'expressions de la forme $F(x)\,dx$ qui représentent les aires de trapèzes inscrits dans cette aire. On démontre immédiatement que en général cette intégrale définie est égale à l'accroissement de la fonction φ (intégrale indéfinie de $F(x)\,dx$) lorsque x prend successivement les valeurs a et b.

De sorte que l'on a :

$$\int_a^b F(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a) \qquad (1)$$

Cette équation ne fait qu'exprimer que l'accroissement total de la fonction φ est égal à une somme d'accroissements infiniment petits.

On peut mettre l'intégrale indéfinie sous la forme d'une intégrale définie par l'introduction de la constante arbitraire [qui serait ici $\varphi(a)$] et l'écrire :

$$\int_a^x F(x)\,dx = \varphi(x) - \varphi(a)$$

Remarque. L'équation (1) n'a été écrite qu'en supposant tous les éléments de l'intégrale $\int_a^b F(x)\,dx$ infiniment petits ; lorsque la fonction $F(x)$ devient infinie pour une valeur de x comprise entre a et b, cette équation n'est généralement plus vérifiée et en en faisant usage on peut être conduit à des absurdités comme dans les exemples qui suivent.

Soit par exemple l'intégrale définie

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2}$$

L'équation (1) n'est pas applicable puisque $\frac{1}{x^2}$ devient infini pour $x = 0$. Cependant si l'on voulait l'appliquer on prendrait la fonction φ égale à $-\frac{1}{x}$ et l'on écrirait

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x^2} = \left(\frac{-1}{+1}\right) + \left(\frac{-1}{-1}\right) = -2.$$

Ce résultat est absurde puisque l'on égale une somme de quantités toutes positives à un nombre négatif.

Il est aisé de reconnaître que le raisonnement général qui nous a conduits à écrire l'équation (1) est en défaut dans ce cas. En effet si on considère la fonction $y = -\frac{1}{x}$ elle est représentée par une hyperbole équilatère ayant les axes pour asymptotes et figurée ci-contre.

Pour écrire l'équation (1) nous avons remarqué que les deux membres représentent la variation de la fonction lorsque x varie de a à b, c'est-à-dire ici de -1 à $+1$. Cela est toujours exact pour le deuxième membre ; mais pour le premier, il est manifeste que dans le cas présent il n'est plus exact car nous faisons la somme des accroissements infiniment petits de la fonction sans tenir compte du passage brusque de ∞ à $-\infty$.

Nous arrivons de même à un résultat absurde en voulant calculer l'intégrale définie.

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x}$$

L'intégrale générale est $\int \frac{dx}{x}$ ou $L(x)$ en appliquant la formule (1) il viendrait donc

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = L(1) - L(-1) = -\pi i.$$

Ce qui est absurde puisqu'on trouve une imaginaire pour la somme d'éléments tous réels.

Différentiation des Intégrales.

1° Dérivée d'une intégrale par rapport à une de ses limites.

Soit l'intégrale définie

$$\int_a^b F(x)\,dx = \varphi(b) - \varphi(a)$$

que nous considérons comme une fonction de b, a étant supposé constant, sa dérivée par rapport à b est évidem-ment :

$$\varphi'(b) \text{ c'est-à-dire } F(b).$$

La dérivée par rapport à la limite inférieure sera

$$-\varphi'(a) \text{ c'est-à-dire } -F(a).$$

2° Considérons une intégrale définie de la forme

$$\int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx$$

en faisant l'intégration par rapport à x entre les limites a et b on obtient une certaine fonction u de α dont nous nous proposons de calculer la dérivée $\frac{du}{d\alpha}$.

Je donne à α l'accroissement $\Delta\alpha$ soit Δu l'accroisse-ment de la fonction ; on a

$$u + \Delta u = \int_a^b \varphi(x, \alpha + \Delta\alpha)\,dx$$

d'ailleurs $u = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx$

d'où $\frac{\Delta u}{\Delta\alpha} = \int_a^b \frac{\varphi(x,\alpha+\Delta\alpha) - \varphi(x,\alpha)}{\Delta\alpha}\,dx$

et à la limite

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x,\alpha)}{d\alpha}\,dx$$

Pour que cette démonstration soit valable, il faut que les éléments de l'intégrale ne deviennent infinis pour aucune des valeurs de x comprises entre les limites. ※

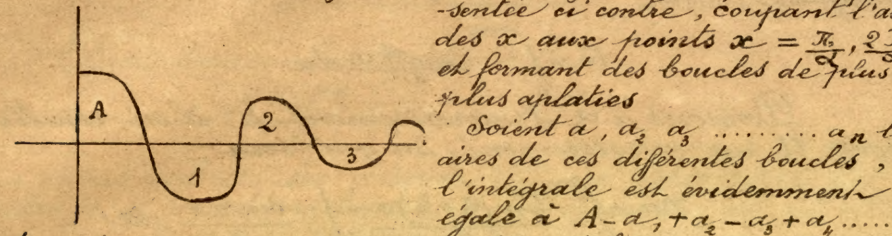
Dans le cas où il en est ainsi cette règle n'est pas applicable et donne souvent des résultats absurdes.

Exemple - Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x}\,dx.$$

※ La condition nécessaire et suffisante pour que la règle de différentiation soit applicable est que la fonction F admette par rapport à α une dérivée F' qui soit une fonction de α finie et continue pour la valeur considérée de α et une fonction de x finie et continue lorsque x varie de a à b.

Cette intégrale est parfaitement déterminée ; en effet si nous traçons la courbe $y = \frac{\sin \alpha x}{x}$ elle affectera la forme représentée ci contre, coupant l'axe des x aux points $x = \frac{\pi}{\alpha}, \frac{2\pi}{\alpha}$ et formant des boucles de plus en plus aplaties



Soient $a, a_2\ a_3 \ldots\ldots\ldots a_n$ les aires de ces différentes boucles, l'intégrale est évidemment égale à $A - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \ldots\ldots$ les termes $- a_1 + a_2 - a_3 + a_4 \ldots$ constituent la somme d'une série à termes alternativement positifs ou négatifs dont la valeur absolue des termes va en décroissant et tend vers 0. (Cela tient à ce que $\sin \alpha x$ se reproduit périodiquement et que x augmente indéfiniment)

Une telle série est convergente, donc l'intégrale U a une valeur finie et déterminée. Cette valeur est d'ailleurs indépendante de α car si je fais le changement de variable, $y = \alpha x$, d'où $dx = \frac{dy}{\alpha}$,

il vient :

$$U = \int_0^{\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

Cette dernière intégrale est évidemment indépendante de α. Il faut d'ailleurs remarquer que nous avons supposé α positif sans quoi la limite supérieure de la nouvelle intégrale deviendrait $-\infty$ et dans ce cas on trouverait pour U la valeur

$$\int^{-\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

valeur nécessairement égale et de signe contraire à la précédente puisque lorsqu'on change α en $-\alpha$ on change le signe de tous les éléments de l'intégrale ; enfin si $\alpha = 0$ tous les termes de l'intégrale sont nuls : celle-ci est donc nulle.

Il résulte de là que la dérivée $\frac{du}{d\alpha}$ doit être nulle. Or si nous la calculons d'après la règle précédente, il vient :

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^{\infty} \cos \alpha x\, dx$$

expression qui n'est pas nulle mais indéterminée. La courbe $y = \cos \alpha x$ formant une série de boucles égales de part et d'autre de l'axe des x.

La règle de différentiation sous le signe $\int$ n'est donc pas applicable à cet exemple.

Reprenons dans ce cas particulier le raisonnement fait pour le cas général ; il est aisé de voir où il tombe en défaut : soit

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$

Donnons à α l'accroissement h, il en résulte pour u un accroissement Δu qui sera

$$\Delta u = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha + h)x}{x} - \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{x} dx$$
$$= \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha + h)x - \sin \alpha x}{x} dx$$
$$\text{et } \frac{\Delta u}{h} = \int_0^\infty \frac{\sin(\alpha + h)x - \sin \alpha x}{hx} dx$$

Si nous faisons le même raisonnement que précédemment nous remplacerons

$\sin(\alpha + h)x - \sin \alpha x$ par $hx \cos \alpha x$ c'est-à-dire que nous négligerons les termes en h^2 devant ceux-ci, ce qui n'est légitime que si le coefficient de h^2 reste fini et ceci n'a pas toujours lieu lorsque x varie de 0 à l'∞.

En toute rigueur on a :

$$\sin(\alpha + h)x = \sin(\alpha x) + hx \cos(\alpha x) - \frac{h^2 x^2}{1 \cdot 2} \sin \alpha x - \frac{h^3 x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cos \alpha x \dots$$

d'où

$$\frac{\Delta u}{h} = \int_0^\infty \cos \alpha x \, dx - \frac{h}{2} \int_0^\infty x \sin \alpha x \, dx$$

et cette expression ne peut pas être réduite à son premier terme car le deuxième est le produit d'un infiniment petit par une intégrale dont la valeur numérique est infinie et l'on ne peut même pas chercher une vraie valeur de ce 2e membre puisque l'intégrale

$$\int_0^\infty x \sin \alpha x \, dx$$

a une valeur infinie indépendamment de h.

Généralisation de la règle de différentiation.

Etant donnée l'intégrale définie

$$u = \int_a^b \varphi(x, \alpha)\, dx$$

nous avons calculé la dérivée $\frac{du}{d\alpha}$ en supposant les limites a et b indépendantes de α; dans le cas où elles dépendent de α; u se trouve être une fonction composée dont la dérivée nous sera donnée par la règle de différentiation des fonctions composées

On aura :

$$du = \frac{du}{d\alpha} d\alpha + \frac{du}{da} da + \frac{du}{db} db$$

Nous savons calculer les 3 dérivées qui figurent dans le 2e membre, il vient alors en faisant la substitution et divisant de part et d'autre par d .

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_a^b \frac{d\varphi(x, \alpha)}{d\alpha} dx + \varphi(b, \alpha) \frac{db}{d\alpha} - \varphi(a \alpha) \frac{da}{dx} \quad (2)$$

Cette règle de différentiation ne sera d'ailleurs applicable que dans les cas où les règles de différentiation par rapport aux limites et de différentiation sous le signe $\int$ le sont.

Exemple - C'est ainsi que la formule (2) ne saurait être appliquée par exemple à l'intégrale :

$$u = \int_0^\alpha \frac{dx}{\sqrt{\alpha x - x^2}}$$

La fonction u est indépendante de α en effet si je pose

$$x = \alpha y$$

il vient

$$u = \int_0^1 \frac{\alpha\, dy}{\sqrt{\alpha^2 y - \alpha^2 y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y - y^2}}$$

Cette dernière intégrale est évidemment indépendante de α (On a vu cours de 1ère année p. 243 que l'intégrale générale est $2 \arcsin \sqrt{x}$ ce qui donne pour cette intégrale définie la valeur π) Donc $\frac{du}{d\alpha}$ doit être nulle.

Or si l'on applique la formule (2) il vient :

$$\frac{du}{d\alpha} = -\frac{1}{2}\int_0^\alpha (\alpha x - x^2)^{-\frac{3}{2}} x\,dx + \frac{1}{0}$$

Si on calcule l'intégrale définie on la trouve infinie ; la valeur $\frac{du}{d\alpha}$ se présente donc sous une forme indéterminée qui n'admet pas de vraie valeur.

Intégration des Intégrales.

Considérons l'intégrale

$$u = \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx$$

qui est une fonction de α et proposons nous de calculer l'intégrale indéfinie

$$\int_b^\alpha u\,d\alpha.$$

Je dis que pour l'obtenir il suffit d'intégrer par rapport à α la fonction φ puis d'intégrer ensuite par rapport à x la nouvelle fonction obtenue, c'est-à-dire que l'on a :

$$\int_b^\alpha dx \int_a^b \varphi(x,\alpha)\,dx = \int_a^b dx \int_b^\alpha \varphi(x,\alpha)\,d\alpha \qquad (3)$$

Cette équation se traduit souvent par cet énoncé : on peut intervertir l'ordre de deux intégrations successives.

Pour démontrer l'égalité (3) il suffit d'abord de remarquer que si on en dérive les deux membres par

par rapport à α on obtient des résultats identiques ; les deux membres sont donc égaux à une constante près (par rapport à α); mais ils sont tous deux nuls pour $\alpha = b$, donc ils sont égaux. Ce théorème permet de ramener le calcul d'un grand nombre d'intégrales définies au calcul d'autres intégrales définies souvent très différentes.

Il se traduit par l'équation (3) qui peut encore s'écrire en remplaçant la variable α par y :

$$\int_b^y dy \int_a^b \varphi(x,y)\,dx = \int_a^b dx \int_b^y \varphi(x,y)\,dy \quad (4)$$

Si l'on choisit $\varphi(x,y)$ de manière que les deux premières intégrations indiquées dans chacun des deux membres puissent se faire on obtient une égalité entre deux intégrales.

Pour qu'il en soit ainsi, il suffit que $\varphi(x,y)$ soit intégrable par rapport à x et par rapport à y c'est-à-dire que l'on ait à la fois :

$$\varphi(x,y) = \frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

Dans ce cas, l'égalité (4) devient :

$$\int_b^y (Q_b - Q_a)\,dy = \int_a^b (P_y - P_b)\,dx \quad (5)$$

La connaissance de l'une de ces deux intégrales fera connaître l'autre. Il est facile de trouver une infinité de fonctions P et Q satisfaisant à cette condition que l'on ait :

$$\frac{dP}{dy} = \frac{dQ}{dx}$$

On sait par exemple que si l'on a :

$$\varphi(x + yi) = P + Qi$$

on a aussi

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$
$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

Chaque fonction imaginaire donnera donc deux équations telles que (5)

Applications.

Soit la fonction

$$\varphi(x+yi) = e^{-(x+yi)^2} = e^{-x^2+y^2-2xyi} = e^{-x^2} e^{y^2} (\cos 2xy - \sin 2xy)$$

Les fonctions P et Q sont respectivement

$$P = e^{-x^2} e^{y^2} \cos 2xy$$
$$Q = e^{-x^2} e^{y^2} \sin 2xy$$

Appliquant à ces fonctions l'équation (5) en prenant pour limites inférieures des deux intégrations 0 et pour limites supérieures x et y, il vient :

$$\int_0^x (P - P_0)\,dx = \int_0^y (Q - Q_0)\,dy$$

ou

$$\int_0^x \left(e^{-x^2} e^{y^2} \cos 2xy - e^{-x^2}\right) dx = \int_0^y \left(e^{-x^2} e^{y^2} \sin 2xy\right) dy$$

faisant $x = \infty$, la 2e intégrale s'annule, il vient donc.

$$\int_0^\infty \left(e^{-x^3} e^{y^2} \cos 2xy\right) dx = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$$

la 1e intégrale est comme on sait égale à $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

On a donc

$$e^{y^2} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xy\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

ou

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2xy\, dx = \frac{1}{2} e^{-y^2} \sqrt{\pi}$$

ou en posant $2y = m$

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos mx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\frac{m^2}{4}}$$

Cas d'exception - Cauchy, le premier, a fait observer que l'équation (3) et par suite les équations (4) et (5) que nous en avons déduites ne sont pas toujours exactes ; il est en effet évident que pour que l'équation (3) soit applicable il faut à la fois que les règles de dérivation par rapport aux limites de l'intégrale et de dérivation sous le signe ∫ le soient.

C'est ainsi que lorsque les éléments de l'une des intégrales qui figurent dans l'équation (3) peuvent devenir infinis on s'expose à des erreurs en appliquant cette équation.

C'est ainsi que l'on ne peut pas toujours écrire :

$$\int_0^x dx \int_0^y dy \frac{d^2V}{dx\,dy} = \int_0^x dy \int_0^y dx \frac{d^2V}{dx\,dy}$$

Cauchy a pris pour exemple la fonction

$$V = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$$

On a

$$\frac{dV}{dx} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{dV}{dy} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

$$\frac{d^2V}{dx\,dy} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

et a montré que l'égalité

$$\int_0^1 dx \int_0^1 dy \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \int_0^1 dy \int_0^1 dx \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

n'est pas satisfaite.

En effet on a

$$\int_0^1 dy \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \left[-\frac{y}{x^2+y^2}\right]_0^1 = \frac{-1}{x^2+1}$$

le 1er membre est donc égal à $-\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1} = -\frac{\pi}{2}$

On a de même

$$\int_0^1 dx \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

et le 2e membre est égal à $+\int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = +\frac{\pi}{2}$.

Ces deux membres sont manifestement inégaux et le théorème est en défaut. Cela tient à ce que lorsque l'on fait simultanément x et y nuls, l'expression à intégrer $\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$ est absolument indéterminée; elle augmente indéfiniment par valeurs positives ou par valeurs négatives suivant que y est inférieur à x ou inversement.

Pour le montrer plus clairement nous allons faire la double intégration entre les limites α et 1 pour x et les limites β et 1 pour y, α et β étant deux nombres positifs inférieurs à 1. Dans ce cas les formules précédemment établies sont applicables et l'on aura

$$\int_\alpha^1 dx \int_\beta^1 dy \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \int_\beta^1 dy \int_\alpha^1 dx \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}$$

Je calcule le premier membre

On a

$$\int_\beta^1 dy \frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2} = \frac{-1}{1+x^2} + \frac{\beta}{\beta^2+x^2}$$

il vient donc

$$\int_\alpha^1 \frac{-dx}{1+x^2} + \int_\alpha^1 \frac{\beta dx}{\beta^2+x^2}$$

Mais $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc. tg } x$

et $\int \frac{\beta dx}{\beta^2+x^2} = \text{arc. tg } \frac{x}{\beta}$

Il vient donc enfin pour la valeur du premier membre

$$\text{arc tg } \alpha - \frac{\pi}{2} + \text{arc tg } \frac{1}{\beta} - \text{arc tg } \frac{\alpha}{\beta}$$

Calculant de même le deuxième membre on obtient une expression égale à celle-ci pour toutes valeurs de α et de β différentes 0.

Mais lorsque α et β sont nuls simultanément arc. tg $\frac{\alpha}{\beta}$ devient complètement indéterminé et il n'est pas étonnant qu'en calculant par des méthodes différentes

les valeurs que prennent les deux membres, on trouve des résultats différents.

2e Leçon.

Démonstration de Gauss du Théorème de Dalembert. Calcul de quelques intégrales définies remarquables.

Nous avons établi dans la dernière leçon que dans le calcul d'une intégrale double on peut intervertir l'ordre des intégrations successives.

Pour que la démonstration soit valable il faut et il suffit que la fonction à intégrer reste finie pour toutes valeurs des variables comprises entre les limites d'intégration. Donc toutes les fois que l'application de la règle conduira à un résultat contradictoire on pourra affirmer que la fonction à intégrer devient infinie pour un système de valeurs des variables comprises entre les limites d'intégration

C'est sur cette remarque que Gauss a fondé une démonstration du Théorème de Dalembert.

Théorème. Toute équation algébrique à coefficients réels

$$Z^m + A_1 Z^{m-1} + A_2 Z^{m-2} + \dots + A_p Z^{m-p} \dots\dots + A_m = 0 \quad (1)$$

admet au moins une racine réelle ou imaginaire.

En effet tout nombre réel ou imaginaire pouvant se mettre sous la forme $z = \rho(\cos\omega + i\sin\omega)$, je substitue cette valeur à z dans le premier membre de l'équation (1). Le résultat de la substitution est de la forme

$$P + Qi$$

en posant.

$$P = \rho^m \cos m\omega + A_1 \rho^{m-1}\cos(m-1)\omega \ldots\ldots + A_p \rho^{m-p}\cos(m-p)\omega \ldots + A_m$$

$$Q = \rho^m \sin m\omega + A_1 \rho^{m-1}\sin(m-1)\omega \ldots\ldots + A_p \rho^{m-p}\sin(m-p)\omega \ldots + A_{(m-1)}\rho \sin\omega$$

La condition pour que ce résultat soit nul est que l'on ait simultanément

$$P = 0$$

$$Q = 0$$

ou encore $P^2 + Q^2 = 0$

puisque P et Q sont réels.

Pour démontrer qu'il existe au moins un système de valeurs de ρ et de ω satisfaisant à cette condition je considère les deux intégrales doubles :

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\omega \, \frac{d^2 \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}}{d\rho\, d\omega}$$

$$\text{et} \int_0^{2\pi} d\omega \int_0^R d\rho \, \frac{d^2 \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}}{d\rho\, d\omega}$$

Ces deux intégrales sont égales quelles que soient les limites des deux intégrations successives à moins que la dérivée $\dfrac{d^2 \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}}{d\rho\, d\omega}$ ne devienne infinie pour un système de valeurs de ρ et de ω comprises entre ces limites.

Or si l'on calcule cette dérivée on constate que son numérateur n'est infini que lorsque P ou Q le sont eux-mêmes ce qui n'a lieu pour aucune valeur finie de ρ; elle ne peut devenir infinie que pour un système de valeurs

de ω et de ρ annulant son dénominateur $(P^2+Q_1^2)^2$ c'est-à-dire pour un système de valeurs de ω et de ρ répondant à une racine de l'équation proposée.

Si maintenant nous effectuons la double intégration dans les deux membres, nous trouvons, pour une valeur suffisamment grande mais non infinie de R des résultats inégaux donc l'équation proposée admet une racine.

Pour faire ces intégrations je remarque que l'on a:

$$\frac{d\ \mathrm{arctg}\ \frac{Q_1}{P}}{d\rho} = \frac{P\frac{dQ_1}{d\rho} - Q_1\frac{dP}{d\rho}}{P^2+Q_1^2} \qquad (\alpha)$$

$$\frac{d\ \mathrm{arctg}\ \frac{Q_1}{P}}{d\omega} = \frac{P\frac{dQ_1}{d\omega} - Q_1\frac{dP}{d\omega}}{P^2+Q_1^2} \qquad (\beta)$$

$$\text{Donc} \int_0^{2\pi} d^2\left(\frac{\mathrm{arctg}\ \frac{Q_1}{P}}{d\omega}\right) d\omega = \left(\frac{P\frac{dQ_1}{d\rho} - Q_1\frac{dP}{d\rho}}{P^2+Q_1^2}\right)_0^{2\pi}$$

Cette expression est évidemment nulle car $\frac{P\frac{dQ_1}{d\rho} - Q_1\frac{dP}{d\rho}}{P^2+Q_1^2}$ ne contient que le sinus et le cosinus de ω ou de ses multiples; elle reprend donc la même valeur quand on y fait successivement $\omega=0$ et $\omega=2\pi$. Par suite l'intégrale est toujours nulle.

Pour calculer l'intégrale (β), je remarque que

$$\int_0^R \frac{d^2\mathrm{arctg}\ \frac{Q_1}{P}}{d\omega\, d\rho}\, d\rho = \left[\frac{P\frac{dQ_1}{d\omega} - Q_1\frac{dP}{d\omega}}{P^2+Q_1^2}\right]_0^R \qquad (\gamma)$$

L'expression $\frac{P\frac{dQ_1}{d\omega} - Q_1\frac{dP}{d\omega}}{P^2+Q_1^2}$ est le quotient de 2 polynomes de degré $2m$ par rapport à la variable ρ donc pour une valeur $\rho=R$ suffisamment grande, elle diffère aussi peu que l'on veut du quotient des coefficients des termes de plus fort degré en ρ c'est-à-dire de

$$\frac{m(\sin^2 m\omega + \cos^2 m\omega)}{\cos^2 m\omega + \sin^2 m\omega} = m$$

D'ailleurs cette expression s'annule avec ρ donc pour

une valeur de m suffisamment grande l'intégrale γ diffère aussi peu que l'on veut de m ; l'intégrale double diffère alors aussi peu que l'on veut de

$$\int_0^{2\pi} m\, d\omega = 2m\pi$$

Donc pour une valeur suffisamment grande de R les intégrales (α) et (β) ont des valeurs différentes. Ce qui justifie le théorème.

Calcul de quelques intégrales définies remarquables.

$\int_0^\infty x^{2m} e^{-\alpha x^2} dx$ On a démontré (Cours de 1re année page 307) l'égalité

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Si je fais dans cette intégrale le changement de variable $x = y\sqrt{\alpha}$ en supposant que α soit positif que nous considérions la racine carrée arithmétique il vient :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} \sqrt{\alpha}\, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

ou en désignant cette nouvelle variable par x

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, \alpha^{-\frac{1}{2}}$$

On déduit de là en dérivant par rapport à α, toutes réductions faites

$$\int_0^\infty x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{2} : \alpha$$

Dérivant encore une fois il vient

$$\int_0^\infty x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \alpha^{-\frac{5}{2}}$$

Dérivant de même m fois, il vient :

$$\int_0^\infty x^{2m} e^{-\alpha x^2} dx = \left(\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2}\alpha^{-\frac{2m+1}{2}}$$

On peut d'ailleurs parvenir à cette formule par intégrations par parties ; en effet on peut écrire

$$u_m = \int_0^\infty x^{2m} e^{-\alpha x^2} dx = \int_0^\infty \left(e^{-\alpha x^2} x\,dx\right) x^{2m-1}$$

Dans la parenthèse on reconnaît la différentielle de

$$-\frac{1}{2\alpha}\left(e^{-\alpha x^2}\right)$$

intégrant par parties il vient

$$u_m = \left[-\frac{x^{2m-1} e^{-\alpha x^2}}{2\alpha}\right]_0^\infty + \frac{2m-1}{2\alpha}\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2m-2} dx$$

La partie toute intégrée s'annulant à la fois pour les 2 limites il reste la formule récurrente

$$u_m = \frac{2m-1}{2}\alpha^{-1} u_{m-1}$$

Or

$$u_0 = \int e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit immédiatement :

$$u_m = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{2m-1}{2}\alpha^{-\frac{2m+1}{2}}$$

$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos mx\, dx$

De la connaissance de la valeur de u_m on peut déduire celle de l'intégrale.

$$V = \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} \cos mx\, dx$$

En effet si l'on développe cos m x (développement qui est toujours convergent) il vient :

$$V = \int_0^\infty dx\, e^{-\alpha x^2} \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m^{2n} x^{2n}}{1.2 \cdots 2n}$$
$$= \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{1.2 \cdots 2n} \int_0^\infty e^{-\alpha x^2} x^{2n} dx$$

Mais cette dernière intégrale est celle que nous venons de calculer ; la remplaçant par sa valeur il vient

$$V = \sum_{n=0}^{n=\infty} (-1)^n \frac{m^{2n}}{1.2 \cdots 2n} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{1.3 \cdots \overline{2n-1}}{2^n} \alpha^{-\frac{2n+1}{2}}$$

mais

$$\frac{1.3 \cdots \overline{2n-1}}{1.2 \cdots 2n} = \frac{1}{2.4 \cdots 2n} = \frac{1}{1.2 \cdots n} \times \frac{1}{2^n}$$

$$V = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{(-1)^n}{1.2 \cdots n} \left(\frac{m^2}{4\alpha}\right)^n$$

On reconnait dans la série le développement

de $e^{-\frac{m^2}{4\alpha}}$

On a donc

$$V = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha}} e^{-\frac{m^2}{4\alpha}}$$

Cette formule se déduit immédiatement de la suivante qui a été établie dans la dernière leçon.

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos mx\, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{m^2}{4}}$$

Il suffit de faire le changement de variable $x^2 = \alpha y^2$ puis de désigner de nouveau la variable par x pour retomber sur la formule que nous venons d'établir.

---

x

La formule

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x \, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}$$

a été établie pour la 1re fois par Euler ; voici le calcul qu'il faisait.

Partant de la formule comme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

[On a établi $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ et il est évident que l'intégrale prise entre les limites $-\infty$ et $+\infty$ est le double de celle prise entre 0 et $+\infty$ puisque la fonction à intégrer est paire.]

Il pose $x = y + \beta$.

Il vient ainsi :

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(y+\beta)^2} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-2\beta y} e^{-\beta^2} dy$$

Posant $\beta = \alpha i$ il vient

$$\sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{-2\alpha i y} e^{\alpha^2} dy$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} (\cos 2\alpha y + i \sin 2\alpha y) dy = \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}$$

Égalant les parties réelles des 2 membres il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\alpha y \, dy = \sqrt{\pi}\, e^{-\alpha^2}$$

mais comme $e^{-y^2} \cos 2\alpha y$ se reproduit identiquement lorsque y change de signe, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\alpha y \, dy = 2\int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos 2\alpha y \, dy$$

ce qui donne finalement

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} \cos 2\alpha y \, dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\alpha^2}$$

$\int_0^\infty \cos x^2\, dx$

1ère Méthode

Euler a établi de même une autre formule célèbre. Partant de

$$\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

je fais le changement de variable $x = \alpha y$ il vient

$$\int_0^\infty e^{-\alpha y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

faisant $\alpha = i = (-1)^{\frac{1}{2}}$ et désignant de nouveau la variable par x il vient :

$$\int_0^\infty e^{-ix^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,(-1)^{-\frac{1}{4}}$$

ou

$$\int_0^\infty (\cos x^2 - i \sin x^2)\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i \sin\frac{\pi}{4}\right)$$

séparant les parties réelles et imaginaires il vient en remarquant que

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\int_0^\infty \cos x^2\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{2}{2}}$$

$$\int_0^\infty \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2}{2}}$$

Ces deux derniers calculs faits par Euler ne sont pas valables parce qu'il applique au cas de variables imaginaires des formules établies seulement dans le cas où la variable est réelle et cela sans justifier cette extension de la formule.

C'est ainsi que dans le deuxième exemple on fait $\alpha = i$ dans la formule

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}$$

qui n'est établie qu'en supposant α réel et positif et qui devient même absurde lorsque l'on donne à α une valeur négative puisque l'on serait conduit à égaler une somme d'éléments réels à une quantité imaginaire. Cependant il se trouve que les deux calculs précédents conduisent à des résultats exacts ; nous savons déjà qu'il en est ainsi pour le 1er Calcul puisque nous en avions déjà établi le résultat par une autre méthode. Pour justifier celui du 2e on peut conduire le calcul ainsi qu'il suit :

2e Méthode.

Soit à calculer $u = \int_0^\infty \cos x^2\, dx$

je pose $x^2 = z$

il vient

$$u = \int_0^\infty \frac{\cos z\, dz}{2\sqrt{z}}$$

Mais d'après une formule précédemment établie on a

$$\frac{1}{\sqrt{z}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z\alpha^2}\, d\alpha.$$

Faisant la substitution dans l'intégrale à calculer celle-ci prend la forme d'une intégrale double

$$u = \int_0^\infty \cos z\, dz \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-z\alpha^2} d\alpha = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty dz\, e^{-z\alpha^2} \cos z$$

Le changement de l'ordre des intégrations est ici légitime parce que la fonction à intégrer $e^{-z\alpha^2}\cos z$ ne devient infinie pour aucune valeur des variables comprise entre les limites d'intégration

Mais l'intégrale indéfinie :

$\int e^{-z\alpha^2} \cos z\, dz$ nous est connue (voir cours de 1e année p. 255), on sait que l'on a

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{a e^{ax} \cos bx + b e^{ax} \sin bx}{a^2 + b^2}$$

Donc on a ici

$$\int e^{-z\alpha^2}\cos z\,dz = -\frac{\alpha^2 e^{-z\alpha^2}\cos z + e^{-z\alpha^2}\sin z}{1+\alpha^4}$$

On en déduit

$$\int_0^\infty dz\, e^{-\alpha^2 z}\cos z = \frac{+\alpha^2}{1+\alpha^4}$$

Il vient donc

$$u = \int_0^\infty \frac{\alpha^2\,d\alpha}{1+\alpha^4}$$

On peut immédiatement calculer l'intégrale indéfinie $\int \frac{\alpha^2\,dx}{1+\alpha^4}$ puisque la fonction à intégrer est rationnelle on a

$$\frac{\alpha^2}{1+\alpha^4} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{\alpha}{\alpha^2-\alpha\sqrt{2}+1} - \frac{\alpha}{\alpha^2+\sqrt{2}+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)^2+1} - \frac{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{2}}{\left(\alpha\sqrt{2}+1\right)^2+1}\right]$$

L'intégrale prend donc la forme

$$u = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\int_0^\infty \frac{\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\alpha}{\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,d\alpha}{\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)^2+1} - \int_0^\infty \frac{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)d\alpha}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \int_0^\infty \frac{\sqrt{2}\,d\alpha}{\left(\alpha\sqrt{2}+1\right)^2+1}\right]$$

Les 4 intégrales générales sont connues ; ce sont respectivement :

$$\frac{1}{2}L\left[\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\right],\ \mathrm{arctg}\left(\alpha\sqrt{2}-1\right)\ \frac{1}{2}L\left[\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}\right],\ \mathrm{arctg}\left(\alpha\sqrt{2}+1\right.$$

L'intégrale générale totale est donc

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}L\frac{\left(\alpha-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}}{\left(\alpha+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2+\frac{1}{2}} + \mathrm{arctg}\left(\alpha\sqrt{2}-1\right) + \mathrm{arctg}\left(\alpha\sqrt{2}+1\right)\right]$$

substituant les limites il vient

$$u = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

C'est le résultat trouvé par Euler.

Application de la règle de différentiation sous le signe $\int$

Soit à calculer l'intégrale

$$u = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} dx$$

on a

$$\frac{du}{d\alpha} = \int_0^\infty e^{-x^2 - \frac{\alpha^2}{x^2}} \left(-\frac{2\alpha}{x}\right) dx$$

Posant $\frac{\alpha}{x} = y$

il vient

$$\frac{du}{d\alpha} = -2\int_0^\infty e^{-\frac{\alpha^2}{y^2} - y^2} dy = -2u$$

On a donc

$$\frac{du}{d\alpha} = -2u$$

d'où $\frac{du}{u} = -2\,d\alpha$

c'est-à-dire

$$u = K e^{-2\alpha}$$

K étant une constante indépendante de α

Pour la déterminer je fais $\alpha = 0$

Il vient

$$K = \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Donc $u = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-2\alpha}$

3e Leçon

Calcul de quelques intégrales remarquables (Suite).

Les intégrales précédemment calculées ont été déduites par différentes transformations de la formule

$$\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

$\int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x}$ Celles qui suivent se rattachent à la formule :

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin ax\, dx}{x} = \frac{\pi}{2}., \text{ (a étant supposé positif)}$$

que nous allons démontrer.

Dans l'intégrale à calculer je remplace $\frac{1}{x}$ par l'intégrale définie

$\int_0^\infty e^{-\alpha x}d\alpha$ qui lui est évidemment égale

Il vient alors :

$$u = \int_0^\infty dx \sin ax \int_0^\infty d\alpha\, e^{-\alpha x}$$

Mais on peut intervertir l'ordre des intégrations

Il vient ainsi :

$$u = \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin ax\, dx$$

Mais on connait l'intégrale indéfinie $\int_0^\infty e^{-\alpha x}\sin ax\, dx$ car elle est de la forme $\int e^{ax}\sin bx\, dx$

(voir cours de 1ère année page 254]. Effectuant le calcul, il vient:

$$u = \int_0^\infty \frac{a\,d\alpha}{a^2+\alpha^2} = \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{a}\right)\right]_0^\infty = \frac{\pi}{2}.$$

Ceci suppose a positif; si a était négatif u serait égal à arctg$(-\infty)$ c'est-à-dire à $-\frac{\pi}{2}$

Enfin dans le cas ou a est nul tous les éléments de l'intégrale sont nuls et l'intégrale l'est aussi. Il résulte donc de là que u se trouve être indépendant de la valeur de a, mais passera brusquement de $\frac{\pi}{2}$ à 0 et de 0 à $-\frac{\pi}{2}$ quand a change de signe en passant par 0.

On déduit immédiatement de la connaissance de cette dernière intégrale définie celle de cette autre:

$$V = \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\,dx = \int_0^\infty \frac{\sin(a+b)x + \sin(a-b)x}{2x}\,dx$$

Cette nouvelle intégrale est la somme de deux intégrales de la forme précédente.

Sa valeur numérique varie avec la grandeur relative de a et de b. – a et b étant tous deux positifs,

Si $a > b$	$V = \frac{\pi}{2}$
$a = b$	$V = \frac{\pi}{4}$
$a < b$	$V = 0$

Calculons maintenant l'intégrale

$$\int_0^h V\,db$$

Nous distinguerons deux cas suivant que h est supérieur ou inférieur à b.

Si $h < a$, tous les éléments de l'intégrale sont égaux à $\frac{\pi}{2}$, elle se réduit alors à

$$\int_0^h \frac{\pi}{2}\,db = \frac{\pi}{2}h$$

Si $h > a$, tous les éléments correspondants aux valeurs de b supérieurs à a sont nuls, l'intégrale se

réduit donc à la somme des éléments compris entre 0 et a lesquels sont de nouveau tous égaux à $\frac{\pi}{2}$

L'intégrale à calculer devient alors :

$$\int_0^a \frac{\pi}{2}\, db = a\frac{\pi}{2}$$

Cette intégrale $\int_0^b V db$ peut se calculer par la règle d'intégration sous le signe $\int$ On a :

$$\int_0^b db \int_0^\infty \frac{\sin ax \cos bx}{x}\, dx = \int_0^\infty \frac{dx \sin ax}{x} \int_0^b \cos bx \cdot db$$

Or $\int_0^b \cos bx\, db = \frac{1}{x}\left(\sin bx \right]_0^b = \frac{\sin bx}{x}$

L'intégrale double prend alors la forme :

$$\int_0^\infty \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}\, dx \quad (1)$$

Cette intégrale définie est d'après ce qui précède égale à

$$\frac{\pi}{2} b \text{ si } b<a \text{ et } \frac{\pi}{2} a \text{ si } b>a$$

On arrive donc à ce résultat que l'intégrale (1) est égale au produit de $\frac{\pi}{2}$ par celui de facteurs a ou b qui est le plus petit.

Soit de même à calculer l'intégrale

$$A = \int_0^\infty V e^{-a}\, da$$

Cette intégrale peut comme la précédente s'obtenir soit en partant de la connaissance de la valeur numérique de V soit par double intégration.

Pour la calculer de la 1e manière, il suffit de remarquer que V est nul pour toute valeur de a inférieure à b et égale à $\frac{\pi}{2}$ pour toute valeur de a supérieure à b.

Donc

$$A = \int_b^\infty \frac{\pi}{2} e^{-a}\, da = \frac{\pi}{2} e^{-b}.$$

Calculant A de la 2e manière, il vient en intervertissant l'ordre des intégrations :

$$A = \int_0^\infty \frac{dx \cos bx}{x} \int_0^\infty \sin ax\, e^{-a}\, da$$

Or l'intégrale indéfinie $\int \sin ax\, e^{-a}\, da$ nous est connue elle rentre dans la forme générale $\int e^{ax} \sin bx\, dx$. elle est égale à

$$-e^{-a} \frac{\sin ax + x \cos ax}{1+x^2}$$

Substituant les limites et portant dans A, il vient :

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\, dx$$

On a donc finalement le résultat

$$A = \int_0^\infty \frac{\cos bx}{1+x^2}\, dx = \frac{\pi}{2} e^{-b}$$

On peut encore parvenir au même résultat de la manière suivante dans A je remplace $\frac{1}{1+x^2}$ par l'intégrale définie $\int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)} 2\alpha\, d\alpha$ qui lui est évidemment égale, A prend alors la forme d'une intégrale double

$$A = \int_0^\infty dx \cos bx \int_0^\infty e^{-\alpha^2(1+x^2)} d\alpha$$

ou en intervertissant l'ordre des intégrations ce que l'on peut faire ici.

$$A = \int_0^\infty \alpha e^{-\alpha^2} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos bx\, dx$$

Mais l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} \cos bx\, dx$$

a été calculée dans la 2e leçon ; elle est égale à $\frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha} e^{-\frac{b^2}{4\alpha^2}}$

On a donc

$$A = \sqrt{\pi} \int_0^\infty e^{-\alpha^2 - \frac{b^2}{4\alpha^2}} d\alpha$$

Mais cette nouvelle intégrale a aussi été calculée dans la dernière leçon ; elle est égale à

$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\, e^{-b}$ On retrouve donc le résultat précédent :

$$A = \frac{1}{2}\pi e^{-b}$$

$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$ Soit à calculer l'intégrale définie

$$u = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$$

Je remarque que cette intégrale ne peut avoir une valeur finie que si a est positif et inférieur à l'unité.

En effet si a était négatif l'intégrale pourrait se mettre sous la forme $\int_0^\infty \frac{dx}{x^m(1+x)}$ m étant positif et supérieur à l'unité. Il est évident que dans ce cas la différentielle à intégrer est pour les valeurs de x voisines de 0 [c'est-à dire comprises entre 0 et un certain nombre α] supérieure à la différentielle $\frac{dx}{x}$, or $\int_0^\alpha \frac{dx}{x}$ est infinie.

Il en est donc à fortiori de même de $\int_0^\alpha \frac{dx}{x^m(1+x)}$ ou encore de $\int_0^\infty \frac{dx}{x^m(1+x)}$

De même si a était supérieur à l'unité, l'intégrale u serait infinie car pour les valeurs de x supérieures à 1, la différentielle $\frac{x^{a-1}dx}{1+x}$ serait supérieure à $\frac{dx}{1+x}$ qui est la différentielle de $L(1+x)$

Donc $\Big[L(1+x)\Big]_1^\infty$ est inférieur à $\int_1^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$ et à fortiori à $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$; mais $\Big[L(1+x)\Big]_1^\infty$ est infini ; il en est donc de même de l'intégrale considérée.

Nous n'étudierons donc l'intégrale $\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$ qu'en supposant $0<a<1$.

La suite du calcul montrera d'ailleurs qu'il suffit que a soit compris entre ces limites pour que l'intégrale u ait une valeur finie.

Ceci posé, pour calculer la valeur de cette intégrale

Euler considère l'intégrale

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}dx}{1+x^{2n}}$$

~~m<n~~

Où m et n sont deux entiers consécutifs.

Cette intégrale se ramène immédiatement à la précédente; en effet je remarque d'abord que la fonction intégrée étant paire, l'intégrale u est le double de celle que l'on obtient en prenant les limites 0 et $+\infty$.

Faisant le changement de variables:

$$z = x^{2n} \text{ d'où } x = z^{\frac{1}{2n}} \text{ et } dx = \frac{1}{2n} z^{\frac{1}{2n}-1} dz$$

$$u_1 = \frac{1}{n}\int_0^{\infty} \frac{z^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+z} dz$$

Si cela est possible on identifiera (nu_1) à u en faisant $\frac{2m+1}{2n} = a$; dans le cas contraire on pourra considérer u comme la limite vers laquelle tend nu_1 lorsque m et n croissent indéfiniment, le rapport $\frac{2m+1}{2n}$ tendant vers la valeur de a.

Le problème est donc ramené au calcul de l'intégrale définie u_1

La fonction à intégrer est une fraction rationnelle je la décompose en $2n$ fractions simples; ces fractions seront deux à deux conjuguées et de la forme

$$\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}$$ $\alpha+\beta i$ étant l'une quelconque des racines de l'équation:

$$1+x^{2n}=0$$

On aura donc

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}=\sum\frac{A+Bi}{x-\alpha-\beta i}$$

ou en réunissant deux à deux les termes conjugués

$$\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}=\sum\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

et par suite

$$u_1=\sum\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

L'intégrale indéfinie

$$\int\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$ nous est connue

(Cours de 1re Année page 249). Elle est égale à

$$AL\left[(x-\alpha)^2+\beta^2\right]-2B\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-\alpha}{\beta}$$

Si nous prenons immédiatement cette intégrale entre les limites $+\infty$ et $-\infty$ nous obtiendrons une expression indéterminée à cause des 2 Logarithmes infinis qui se retranchent (et dont Euler annulait d'ailleurs la différence sans de plus amples calculs). – Pour en trouver la vraie valeur calculons l'intégrale entre les limites $-b$ et $+b$ puis faisons augmenter indéfiniment b.

$$\int_{-b}^{+b}\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=AL\left[\frac{(b-\alpha)^2+\beta^2}{(b+\alpha)^2+\beta^2}\right]-2B\left[\mathrm{arctg}\,\frac{b-\alpha}{\beta}+\mathrm{arctg}\,\frac{b+\alpha}{\beta}\right]$$

Lorsque b augmente indéfiniment, l'argument du logarithme tend vers (1) et par suite le logarithme tend vers 0 ; les deux arctg tendent vers $\frac{\pi}{2}$ et il reste

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2A(x-\alpha)-2B\beta}{(x-\alpha)^2+\beta^2}=-2B\pi$$

Cauchy a objecté que si pour calculer la valeur de l'intégrale entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on la prend

d'abord entre les limites $-g$ et $+h$, g et h étant deux nombres déterminés que nous ferons ensuite croître indéfiniment en laissant leur rapport constant, on trouve pour la valeur de l'intégrale l'expression

$$A L \frac{h^2}{g^2} - 2 B \pi$$

le rapport $\frac{h}{g}$ étant arbitraire, on trouve un résultat arbitraire. On peut répondre à cette objection que lorsqu'on voudra calculer l'intégrale u, il faudra faire la somme des n intégrales partielles et calculer nécessairement ces n intégrales partielles au moyen des 2 mêmes limites h et g; on trouvera alors comme résultat final :

$$u_1 = L \frac{h^2}{g^2} \sum A - 2\pi \sum B$$

et ce résultat est déterminé quelque soit $\frac{h}{g}$ car $\sum A$ est nul. En effet on a identiquement

$$\sum 2 \frac{(A(x-\alpha) - 2 B\beta)}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} = \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$$

Lorsqu'on effectuera la somme de toutes les fractions par réduction au même dénominateur on trouvera comme terme de plus haut degré $x^{2n-1} 2 \sum A$. Or ce terme est nul puisque le numérateur doit être du degré $2m$ et que m est un entier inférieur à n. On trouve donc bien

$$u_1 = -2\pi \sum B.$$

Comme l'avait trouvé Euler.

Reste à exprimer $\sum B$

Les différentes racines de l'équation binôme $1+x^{2n} = 0$ sont

$$\alpha_1 + \beta_1 i = \cos\frac{\pi}{2n} + i \sin\frac{\pi}{2n}$$

$$\alpha_2 + \beta_2 i = \cos\frac{3\pi}{2n} + i \sin\frac{3\pi}{2n}$$

$$\alpha_p + \beta_p i = \cos\frac{(2p-1)\pi}{2n} + i \sin\frac{(2p-1)\pi}{2n}$$

L'expression $A+Bi$, correspondant à une racine $\alpha+\beta i$, est, comme on sait, donnée par la formule

$$A+Bi = \frac{f(\alpha+\beta i)}{f'(\alpha+\beta i)} = \frac{(\alpha+\beta i)^{2m}}{2n(\alpha+\beta i)^{2n-1}} = \frac{(\alpha+\beta i)^{2m+1}}{2n(\alpha+\beta i)^{2n}}$$

mais $(\alpha+\beta i)^{2n}$ est égal à -1 puisque $\alpha+\beta i$ est une racine de $1+x^{2n}=0$. Donc $A+Bi = -\frac{(\alpha+\beta i)^{2m+1}}{2n}$

On en déduit

$$A_1+B_1 i = -\frac{\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2n}\right)^{2m+1}}{2n}$$
$$= -\frac{\cos\frac{2m+1}{2n}\pi + i\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}{2n}$$

et $B_1 = -\frac{1}{2n}\sin\frac{2m+1}{2n}\pi$

de même $B_2 = -\frac{1}{2n}\sin 3\,\frac{2m+1}{2n}\pi$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$B_p = -\frac{1}{2n}\sin(2p-1)\frac{2m+1}{2n}\pi$$

- - - - - - - - - - - - - - - -

$$B_n = -\frac{1}{2n}\sin(2n-1)\frac{2m+1}{2n}\pi$$

Posant $\frac{2m+1}{n}\pi=\theta$ et faisant la somme il vient

$$\sum B = -\frac{1}{2n}\left(\sin\theta+\sin 3\theta \cdots + \sin(2p-1)\theta \cdots + \sin(2n-1)\theta\right)$$

D'où

$$\sin\theta\sum_1 B = -\frac{1}{2n}\left(\sin^2\theta+\sin\theta\sin 3\theta \cdots + \sin\theta\sin(2p-1)\theta \cdots + \sin\theta\sin(2n-1)\theta\right)$$

Remplaçant les produits de sinus par des cosinus et doublant le 1er membre il vient :

$$2\sin\theta\sum_1 B = -\frac{1}{2n}\Big[(1-\cos 2\theta)+(\cos 2\theta-\cos 4\theta)\Big]\cdots+\Big[\cos(2p-2)\theta-\cos 2p\theta\Big]\cdots$$
$$\cdots\cdots+\Big[\cos(2n-2)\theta-\cos 2n\theta\Big]$$

$$= -\frac{1}{2n}\Big[1-\cos 2n\theta\Big]$$

Mais $\theta = \frac{2m+1}{2n}\pi$

donc

$$2n\theta = (2m+1)\pi \text{ et } \cos 2n\theta = -1$$

donc

$$2 \sin\theta \sum B = -\frac{2}{2n}$$

$$\sum B = \frac{-1}{n \sin\theta}$$

D'où

$$u_1 = \frac{\pi}{n \sin\theta} = \frac{\pi}{n \sin \frac{2m+1}{2n}\pi}$$

Lorsque a peut être égalé à $\frac{2m+1}{2n}$ l'intégrale u est égale à nu_1 en posant $a = \frac{2m+1}{2n}$. On a donc

$u = \frac{\pi}{\sin a\pi}$; cette formule est encore exacte lorsque a ne peut pas l'être puisque ce cas peut être considéré comme cas limite du précédent.

4e Leçon.

Fonction $\Gamma(n)$.

Considérons l'intégrale définie

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx$$

C'est une fonction de n que nous désignerons par $\Gamma(n)$

Cette fonction n'est définie par cette intégrale que lorsque n est positif car si n est négatif l'intégrale est infinie.

En effet elle peut s'écrire :

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{x^{1+\mu}} dx$$

en posant $\mu = -n$, μ est alors positif.

Pour toute valeur de x inférieure à 1 on a

$$\frac{e^{-x}}{x^{1+\mu}} > \frac{e^{-1}}{x}$$

Donc
$$\frac{1}{e}\int_0^1 \frac{dx}{x} < \int_0^1 \frac{e^{-x}dx}{x^{1+\mu}} < \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{x^{1+\mu}}$$

La première de ces intégrales est infinie ; la dernière l'est à fortiori

Nous ne considèrerons donc d'abord que les valeurs de n positives ; nous donnerons dans ce qui suivra une définition de $\Gamma(n)$ pour n négatif.

Théorème.– On a $\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$

En effet intégrant par parties il vient :

$$\int e^{-x}dx \,.\, x^n = -x^n e^{-x} + n\int x^{n-1}e^{-x}dx$$

Si on introduit les limites le terme tout intégré s'annule et il reste :

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n).$$

Valeurs particulières de $\Gamma(n)$

faisant $n=1$ il vient

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}dx = 1$$

Appliquant la formule récurrente que nous venons de démontrer il vient successivement :

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(2) = 1$$

$$\Gamma(3) = 1.2$$

$$\Gamma(n) = 1.2 \ldots (n-1)$$

Cette dernière formule suppose n entier

Il est aisé de calculer $\Gamma(\frac{1}{2})$

En effet

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}dx}{\sqrt{x}}$$

Posant $\sqrt{x} = z$ il vient

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2\int_0^\infty e^{-z^2} dz = \sqrt{\pi}.$$

On en déduit immédiatement en appliquant la formule récurrente :

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\cdots\frac{2n-1}{2}\sqrt{\pi}.$$

Cette formule suppose encore n entier.

Telles sont les seules valeurs de la variable pour lesquelles on sache exprimer la fonction Γ à l'aide des transcendantes déja connues.

Si l'on remarque que $1.3.5\ldots\,\overline{2n-1} = \dfrac{1.2.3.4\ldots\,\overline{2n-2}\,.\,\overline{2n-1}}{2.4.6\ldots\ldots\,\overline{2n-2}}$

$$= \frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$$

la dernière formule s'écrit :

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2n}\;\frac{\Gamma(2n)}{2^{n-1}\Gamma(n)}$$

$$\frac{\Gamma\left[n+\frac{1}{2}\right]\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}\,2^{2n-1} = \sqrt{\pi}.$$

Cette formule n'a été établie que pour les valeurs entières de n. Elle est encore exacte lorsque n est fractionnaire. – Nous le démontrerons dans la suite.

Définition de la fonction Γ pour les valeurs négatives de n.

La formule récurrente

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

établie seulement lorsque n est positif, nous servira à définir la fonction Γ pour les valeurs négatives de n. C'est ainsi que donnant d'abord à n toutes les valeurs comprises entre 0 et -1, on déduira de cette formule les valeurs de $\Gamma(n)$ correspondantes. Ayant les valeurs de $\Gamma(n)$ pour n compris entre 0 et -1, on en déduira de même celles de la fonction pour les valeurs de n comprises entre -1 et -2 et ainsi de suite.

Remarque. - Si l'on donne à n des valeurs entières et négatives on trouve toujours $\Gamma(n)$ infini.

En effet je calcule d'abord la valeur $\Gamma(0)$; pour cela je donne à n une valeur positive ε que je ferai ensuite décroître indéfiniment; il vient :

$$\varepsilon\Gamma(\varepsilon) = \Gamma(1+\varepsilon)$$

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{\Gamma(1+\varepsilon)}{\varepsilon}$$

Or lorsque ε tend vers 0, $\Gamma(1+\varepsilon)$ reste fini (car il est facile de démontrer que pour toute valeur positive et finie de n la fonction Γ est finie) Donc $\Gamma(\varepsilon)$ augmente indéfiniment. $\Gamma(0)$ étant infini la formule récurrente donnera successivement pour $\Gamma(-1)$, $\Gamma(-2)$ --- des valeurs infinies.

Expression approchée de $\Gamma(n)$ quand n est très-grand.

De la formule récurrente

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$$

On déduit en prenant les logarithmes :

$$L\left[\Gamma(n+1)\right] - L\left[\Gamma(n)\right] = L.n.$$

Je pose $L\left[\Gamma(n+1)\right] - L\left[\Gamma(n)\right] = \frac{d}{dn} L\left[\Gamma(n)\right] - f_1(n)$ *

---

*Note. - Nous égalons ici la différence des valeurs d'une même fonction de n, pour deux valeurs de n différentes d'une unité

Remplaçant le premier membre par sa valeur il vient :

$$\frac{d}{dn} L\left[\Gamma(n)\right] = L(n) + f_1(n)$$

Donc en intégrant et posant $\int f_1(n)\,dn = F_1(n)$

$$L\left[\Gamma(n)\right] = n L(n) - n + F_1(n) \qquad [1]$$

A l'aide de cette expression de $L(\Gamma(n)]$ je forme la différence

$L\left[\Gamma(n+1)\right] - L\left[\Gamma(n)\right]$ et je l'égale à $L(n)$

Il vient ainsi :

$$L(n) = (n+1] L(n+1) - n L n - 1 + F_1(n+1) - F_1(n)$$

Ou $\quad F_1(n+1) - F_1(n) = 1 - (n+1) L\left[1 + \frac{1}{n}\right]$

Ou développant le logarithme :

$$F_1(n+1) - F_1(n) = 1 - (n+1)\left[\frac{1}{n} - \frac{1}{2 \cdot n^2} + \frac{1}{3 \cdot n^3} - - -\right]$$

Négligeant les termes en $\frac{1}{n^2}$ au 2e membre il reste la valeur approchée :

$$F_1(n+1) - F_1(n) = -\frac{1}{2n}$$

Je pose $\frac{d}{dn}\left[F_1(n)\right] = -\frac{1}{2n} + f_2(n)$

---

mais très-grandes, à la dérivée de cette fonction par rapport à n plus un terme correctif ; c'est-à-dire que nous posons

$$\varphi(n+1) - \varphi(n) = \frac{d}{dn}\varphi(n) + R .$$

Nous pouvons prévoir à priori que R doit être négligeable lorsque n augmente indéfiniment car dans le rapport $\frac{\varphi(n+1) - \varphi(n)}{1}$ l'accroissement 1 de la variable devient infiniment petit par rapport à la variable elle-même. Nous pouvons donc penser que ce rapport tend vers $\frac{d}{dn}\varphi(n)$.

Nous nous servirons plusieurs fois de cette remarque dans la suite du calcul.

d'où en intégrant

$$F_1(n) = -\frac{1}{2} L\, n + F_2(n)$$

Portant dans (1) il vient :

$$L\left[\Gamma(n)\right] = n L\, n - n - \frac{1}{2} L\, n + F_2(n) \qquad (2).$$

Je déduis comme précédemment de cette égalité l'expression de $L\left(\Gamma(n+1)\right] - L\left[\Gamma(n)\right]$ et je l'égale à $L(n)$ il vient :

$$L(n) = (n+\tfrac{1}{2}) L(n+1) - (n-\tfrac{1}{2}) L\, n - 1 + F_2(n+1) - F_2(n)$$

ou $F_2(n+1) - F_2(n) = 1 - (n+\frac{1}{2}) L(1+\frac{1}{n})$

$$= 1 - (n+\tfrac{1}{2})\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} \cdots\right)$$

Ou en négligeant le terme en $\frac{1}{n^3}$

$$F_2(n+1) - F(n) = -\frac{1}{12 n^2}$$

Je pose comme précédemment

$$F_2(n+1) - F_2(n) = \frac{d}{dn}\left[F_2(n)\right] + f_3(n)$$

d'où $\frac{d}{dn}\left[F_2(n)\right] = -\frac{1}{12n^2} - f_3(n)$

et en intégrant :

$$F_2(n) = \frac{+1}{12n} + F_3(n)$$

Portant dans l'expression de $L\left[\Gamma(n)\right]$ il vient :

$$L\left(\Gamma(n)\right] = n L(n) - n - \frac{1}{2} L n + \frac{1}{12n} + F_3(n).$$

Continuant le calcul de la sorte on pourrait obtenir le développement de $L\left(\Gamma(n)\right]$ en série ordonnée suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{n}$.

Il résulte de ce qui précède que le terme correctif que nous avons désigné par $F_2(n)$ tend vers une limite finie lorsque n augmente indéfiniment.

En effet la différence $F_2(n+1) - F_2(n)$ a pour terme principal $-\frac{1}{12n^2}$; elle peut donc être représentée par $-\frac{h_1}{12n^2}$, h_1 tendant vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment.

On peut donc écrire les égalités successives

$$F_2(n+1) - F_2(n) = -\frac{h_1}{12n^2}$$

$$F_2(n+2) - F_2(n+1) = -\frac{h_2}{12(n+1)^2}$$

— — — — — — — — —

$$F_2(n+p) - F_2(n+p-1) = -\frac{h_p}{12(n+p-1)^2}$$

d'où :

$$F_2(n+p) - F_2(n) = -\frac{h_1}{12n^2} - \frac{h_2}{12(n+1)^2} - \cdots - \frac{h_p}{12(n+p)^2}$$

Pour une valeur de n ($n = \gamma$) suffisamment grande, tous les h sont positifs et inférieurs à un nombre déterminé $1+\varepsilon$ et par suite la différence $F_2(\gamma)$ est inférieure en valeur absolue à

$$\left(\frac{1+\varepsilon}{12}\right) \sum_{n=\gamma}^{n=\gamma+p} \frac{1}{n^2}$$

Or la série $\frac{1}{n^2}$ est convergente, donc pour une valeur de n, $n = \gamma_1$, suffisamment grande la somme

$$\sum_{n=\gamma_1}^{n=\gamma_1+p} \frac{1}{n^2}$$ est plus petite que toute quantité donnée - pour toute valeur de p -

Donc pour une valeur de n suffisamment grande (supérieure au plus grand des deux nombres γ et γ_1) la différence

$F_2(n+p) - F_2(n)$ est plus petite que toute quantité donnée ; cela prouve (d'après un théorème connu] que $F_2(n)$ converge vers une limite finie lorsque n augmente indéfiniment.

Soit g cette limite ; je me propose de calculer sa valeur numérique.

Elle est déterminée par l'équation :

$$L[\Gamma(n)] = n\,L\,n - n - \frac{1}{2}L\,n + g \quad (3)$$

lorsque n augmente indéfiniment.

De (3) je déduis en passant des log. aux nombres.

$\Gamma(n) = n^n e^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}} G.$ en posant $G = e^g$

Pour déterminer G, je porte cette valeur de $\Gamma(n)$ dans la relation :

$$\frac{\Gamma(n+\frac{1}{2})\,\Gamma(n)}{\Gamma(2n)}\,2^{2n} = 2\sqrt{\pi}.$$

il vient :

$$G\,\frac{(n+\frac{1}{2})^{n+\frac{1}{2}} e^{-(n+\frac{1}{2})} \frac{1}{\sqrt{n+\frac{1}{2}}} \times n^n e^{-n} \frac{1}{\sqrt{n}}\; 2^{2n}}{(2n)^{2n} e^{-2n} \frac{1}{\sqrt{2n}}} = 2\sqrt{\pi}$$

ou

$$G\,(n+\tfrac{1}{2})^n n^{-n} e^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{2\pi}.$$

ou

$$G = \frac{e^{\frac{1}{2}}}{(1+\frac{1}{2n}]^n}\;\sqrt{2\pi}$$

Si maintenant nous faisons augmenter n indéfiniment il vient la valeur de la constante G ; or $(1+\frac{1}{2n})^n$ pour n infini est égal à $e^{\frac{1}{2}}$. Il reste donc finalement

$$G = \sqrt{2\pi}.$$

Par suite lorsque n augmente indéfiniment on a

$$\Gamma(n) = \frac{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}} \qquad (4)$$

On peut obtenir une formule plus approchée en tenant compte dans l'équation (3) de la connaissance du 1er terme du développement de g, qui est comme on a vu égal à $\frac{1}{12n}$; g peut donc se mettre sous la forme

$$g = g_1\,(1+\frac{1}{12n})$$

g_1 tendant vers g quand n augmente indéfiniment

L'équation (3) devient alors :

$$L\,\Gamma(n) = n\,L\,n - n - \frac{1}{2}\,L\,n + (1+\frac{1}{12n})\,g_1$$

d'où

$$\Gamma(n) = \frac{n e^{-n}}{\sqrt{n}} e^{g\left(1+\frac{1}{12n}\right)}$$

Or

$$e^{g\left(1+\frac{1}{12n}\right)} = e^{g} e^{\frac{g}{12n}} = G e^{\frac{LG}{12n}} = G e^{\frac{L\sqrt{2\pi}}{12n}}$$

On a donc la nouvelle formule approchée :

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}}\, e^{\frac{L\sqrt{2\pi}}{12n}}$$

Ou en développant $e^{\frac{L\sqrt{2\pi}}{12n}}$ et limitant le développement au 1er terme

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{L\sqrt{2\pi}}{12n}\right]$$

Formule qu'on peut encore réduire à

$$\Gamma(n) = \sqrt{2\pi}\, \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{n}} \left(1 + \frac{1}{12n}\right] \qquad (5)$$

La formule (4) et surtout celle-ci, font connaître $\Gamma(n)$ avec une approximation assez grande quand n est grand ; l'erreur relative commise est assez faible, mais cependant $\Gamma(n)$ augmentant extrêmement vite avec n, l'erreur absolue est pourtant énorme.

C'est ainsi que si l'on considère

$$\Gamma(21) = 20! = 1.2.3 \cdots 20.$$

la valeur donnée par la formule (4) présente une erreur relative qui atteint $\frac{1}{2000}$ et une erreur absolue supérieure à 10^{16} ; si on emploie la formule (5) l'erreur relative devient inférieure à $\frac{1}{10000}$ et l'erreur absolue est voisine de 10^{15}.

Objection.

Nous avons démontré que G tend vers une limite déterminée en supposant toujours que l'on augmente n, unité par unité ; cette démonstration ne suffit donc pas à établir que lorsque n augmente indéfiniment d'une manière quelconque, G tende vers une limite déterminée ; on peut supposer à priori que G est une fonction périodique de n dont la période est 1 de la

forme $G = f(2n\pi)$ par exemple

Pour compléter la démonstration il nous faut établir que dans la formule

$$\Gamma(n) = e^{-n} n^n \frac{1}{\sqrt{n}} G$$

pour une valeur suffisamment grande de n, G varie aussi peu que l'on veut lorsque l'on augmente n d'une quantité quelconque δ (que nous pouvons évidemment supposer comprise entre 0 et 1] c'est à dire encore que si l'on considère les deux formules

$$\Gamma(n) = e^{-n} n^n \frac{1}{\sqrt{n}} G \qquad (\alpha)$$

$$\Gamma(n+\delta) = e^{-(n+\delta)} (n+\delta) \frac{1}{\sqrt{n+\delta}} G' \quad (\beta)$$

qui définissent G et G' le rapport $\frac{G'}{G}$ tend vers l'unité lorsque n augmente indéfiniment quel que soit δ.

Divisant les 2 égalités α et β membre à membre il vient :

$$\frac{\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(n)} = \frac{e^{-(n+\delta)} (n+\delta)^{(n+\delta)} \frac{1}{\sqrt{n+\delta}}}{e^{-n} n^n \frac{1}{\sqrt{n}}} \frac{G'}{G}$$

$$= e^{-\delta} \left(1+\frac{\delta}{n}\right)^n \sqrt{\frac{n}{n+\delta}} \, (n+\delta)^\delta \frac{G'}{G}$$

Or lorsque n augmente indéfiniment $\left(1+\frac{\delta}{n}\right)^n$ tend vers e^δ, $\sqrt{\frac{n}{n+\delta}}$ vers l'unité et $(n+\delta)^\delta$ peut être remplacé par n^δ car δ devient négligeable à côté de n.

Il reste donc :

$$\frac{\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(n)} = n^\delta \frac{G'}{G}$$

ou $$\frac{G'}{G} = \frac{\Gamma(n+\delta)}{n^\delta \, \Gamma(n)}$$

Il faudra donc montrer que ce dernier rapport tend vers l'unité quand n augmente indéfiniment.

Cette démonstration est fondée sur le théorème suivant :

Théorème. – On a vu dans la dernière leçon que l'on a :

$$\int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin . a\pi}$$

Le 1er membre peut-être exprimé à l'aide des fonctions Γ.

En effet on a :

$$\frac{1}{1+x} = \int_0^\infty e^{-\alpha(1+x)}d\alpha$$

Remplaçant $\frac{1}{1+x}$ par cette valeur dans l'intégrale il vient :

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \int_0^\infty x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-\alpha(1+x)}d\alpha = \int_0^\infty e^{-\alpha}\, d\alpha \int_0^\infty x^{a-1}e^{-\alpha x}dx \quad (1)$$

L'intégrale

$$\int_0^\infty x^{a-1}e^{-\alpha x}dx$$

se ramène immédiatement aux fonctions Γ ; en posant $\alpha x = y$ elle devient :

$$\frac{1}{a^\alpha}\int_0^\infty y^{a-1}e^{-y}dy = \frac{1}{a^\alpha}\Gamma(a)$$

Portant dans l'équation (1) il vient :

$$\frac{\pi}{\sin a\pi} = \Gamma(a)\int_0^\infty e^{-\alpha}\alpha^{-a}d\alpha = \Gamma(a)\,\Gamma(1-a)$$

On a donc la formule :

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

La formule générale $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$ permet de ramener le calcul d'une table des valeurs de la fonction Γ pour les différentes valeurs de n à la table de ces valeurs pour n compris entre 0 et 1.

Celle-ci permet de ne calculer cette table que pour les valeurs de n comprises entre 0 et ½ ; elle diminue donc les calculs de moitié.

De cette formule on peut immédiatement déduire la valeur de $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$

$$\Gamma\frac{1}{2}\;\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$$

c'est-à-dire $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

Théorème. — L'intégrale $u = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^m}$ peut de même se caculer à l'aide des fonctions Γ. En effet je remarque que l'on a :

$$\int_0^\infty e^{-\alpha(1+x)} \alpha^{m-1} d\alpha = \frac{\Gamma(m)}{(1+x)^m}$$

On le constate immédiatement en faisant le changement de variables

$$\alpha = \frac{y}{1+x}$$

Remplaçant dans u, $(1+x)^m$ par la valeur tirée de cette équation, il vient :

$$u = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty x^{a-1}dx \int_0^\infty e^{-\alpha(1+x)} \alpha^{m-1} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \alpha^{m-1} e^{-\alpha} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} dx$$

Or $\int_0^\infty e^{-\alpha x} x^{a-1} dx$ est connu ; nous l'avons vu dans le calcul précédent égal à $\frac{1}{\alpha^a} \Gamma(a)$;

il vient donc :

$$u = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(m)} \int_0^\infty \alpha^{m-a-1} e^{-\alpha} d\alpha = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(m-a)}{\Gamma(m)}$$

On arrive donc à la formule :

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(m-a)}{\Gamma(m)} = \int_0^\infty \frac{x^{a-1}dx}{(1+x)^m}$$

Il est remarquable que cette intégrable double qui dépend de deux variables a et m, puisse être exprimée à l'aide d'une fonction d'une seule variable.

Si l'on pose $\frac{x}{1+x} = y$ et $m - a = b$ cette formule devient toutes réductions faites :

$$\int_0^1 y^{a-1} (1-y)^{b-1} dy = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

5e Leçon.

Propriétés des fonctions Γ

Dans la dernière leçon nous avons établi que si l'on pose

$$\Gamma(n) = e^{-n} n^{n} \frac{1}{\sqrt{n}} G$$

et que l'on fait augmenter indéfiniment n, unité par unité à partir d'une valeur quelconque, G tend vers une limite finie et déterminée ; nous avons calculé cette limite en nous servant d'une formule démontrée seulement pour le cas où n est entier ; nous avons trouvé ainsi que si dans la formule (1) n augmente indéfiniment G tend vers $\sqrt{2\pi}$; il reste à montrer que si n augmente indéfiniment unité par unité mais à partir d'une valeur non entière, la limite finie vers laquelle tend G est aussi $\sqrt{2\pi}$,

Nous avons montré dans la dernière leçon qu'il suffit pour cela d'établir que le rapport

$$\frac{\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(n)} \quad \text{tend vers } n^{\delta}$$

lorsque n augmente indéfiniment, δ étant un nombre fini absolument quelconque.

Or nous avons établi que l'on a :

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

On en déduit en faisant $a = n$ et $b = \delta$

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\delta)}{\Gamma(n+\delta)} = \int_0^1 x^{\delta-1}(1-x)^{n-1}\,dx$$

Faisant le changement de variable $x = \frac{y}{n}$ dans l'intégrale il vient,

$$\frac{\Gamma(n)\,\Gamma(\delta)}{\Gamma(n+\delta)} = \int_0^n \frac{y^{\delta-1}}{n^{\delta}}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{n-1} dy$$

Je suppose maintenant que n augmente indéfiniment. $\left(1-\frac{y}{n}\right)^{n-1}$ tend vers e^{-y}. Nous admettons qu'il s'ensuit que la valeur de l'intégrale est égale à la limite de

$$\frac{1}{n^\delta}\int_0^n y^{\delta-1}e^{-y}\,dy$$

Or lorsque n augmente indéfiniment, celle-ci devient égale à $\frac{\Gamma(\delta)}{n^\delta}$.

On a donc :

$$\frac{\Gamma(\delta)\Gamma(n)}{\Gamma(n+\delta)} = \frac{\Gamma(\delta)}{n^\delta} \quad \text{ou} \quad \frac{\Gamma(n+\delta)}{\Gamma(n)} = n^\delta$$

lorsque n augmente indéfiniment C.q.F.D.

Ceci montre que la formule (1) la valeur de G est $\sqrt{2\pi}$ quelle que soit la manière dont n augmente indéfiniment.

Nouvelle définition de la fonction Γ.

— Il résulte de ce qui précède que l'on peut poser :

$$\Gamma(n+\delta) = n^\delta\,\Gamma(n)\,(1+\varepsilon) \qquad (2)$$

ε tendant vers 0 quand n augmente indéfiniment par valeurs entières par exemple. Nous allons déduire de là une nouvelle définition de la fonction $\Gamma(\delta)$, définition absolument générale applicable au cas où δ est commensurable ou incommensurable, positif ou négatif, réel ou imaginaire.

En effet de l'équation fondamentale

$$\Gamma(n+1) = n\,\Gamma(n)$$

on déduit successivement

$$\Gamma(\delta+1) = \delta\,\Gamma(\delta)$$

$$\Gamma(\delta+2) = \delta(\delta+1)\,\Gamma(\delta)$$

$$\Gamma(\delta+n) = \delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)\,\Gamma(\delta) \qquad (3)$$

Comparant les équations (2) et (3) il vient :

$$n^{\delta}\,\Gamma(n)\,(1+\varepsilon) = \delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)\,\Gamma(\delta)$$

ε tendant vers 0 quand n augmente indéfiniment.
On a donc

$$\Gamma(\delta) = \frac{\lim \Gamma(n)}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)}\,n^{\delta}$$

lorsque n augmente indéfiniment, mais comme nous avons supposé n entier, il vient :

$$\Gamma(\delta) = \lim \frac{1\,2\cdots n-1}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n-1)}\,n^{\delta}$$

Si dans cette expression on remplace n par $n+1$ et si l'on remarque que, lorsque n augmente indéfiniment $(n+1)^{\delta}$ a même limite que n^{δ} il vient :

$$\Gamma(\delta) = \lim \frac{1\,2\cdots n}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n)}\,n^{\delta}$$

Cette formule servira de définition pour la fonction Γ quelle que soit la valeur de δ, positive ou négative, réelle ou imaginaire, n étant un entier positif qui augmente indéfiniment.

Applications. – On retrouve immédiatement sur cette formule les résultats connus :

si δ est un entier $\dfrac{1.2\cdots n}{\delta(\delta+1)\cdots(\delta+n)} = \dfrac{1.2\cdots(\delta-1)}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\delta)}$

d'où

$$\Gamma(\delta) = \lim\ 1.2\cdots(\delta-1)\,\frac{n^{\delta}}{(n+1)(n+2)\cdots(n+\delta)} = \frac{1.2\cdots(\delta-1)}{(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})\cdots(1+\frac{\delta}{n})}$$

Lorsque n augmente indéfiniment le 2e membre tend vers $1.2\cdots(\delta-1)$

Si δ est nul ou entier négatif, l'un des facteurs du dénominateur s'annule. Le 2e membre est infini pour toute valeur finie de n et il le sera aussi à la limite.

Faisant $\delta = \frac{1}{2}$, il vient :

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \lim n^{\frac{1}{2}}\,\frac{1.2\cdots n}{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\cdots(\frac{1}{2}+n)} = \lim n^{\frac{1}{2}}\,2^{n+1}\,\frac{1.2.3\cdots n}{1.3.5\cdots 2n+1}$$

$$= \lim 2n^{\frac{1}{2}} \quad \frac{2.4\cdots 2n}{1.3\cdots 2n+1}$$

élevant au carré il vient :

$$\left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \lim 4n \frac{2^2.4^2\cdots(2n^2)}{1^2\,3^2\cdots(2n+1)^2}$$

$$= \lim 4n \frac{2^2\,4^2\cdots(2n)^2}{1^2\,3^2\cdots(2n-1)^2} \cdot \frac{1}{(2n+1)^2}$$

$$= 2\lim \frac{2^2\,4^2\cdots(2n^2)}{1^2\,3^2\cdots(2n-1)^2}\,\frac{1}{2n+1}$$

Or le 2e facteur a pour limite $\frac{\pi}{2}$ d'après la formule de Walis [Cours de 1e année p. 276]

$$\text{D'où } \left[\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)\right]^2 = \pi$$

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

On peut de même retrouver la formule

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

En effet

$$\Gamma(a) = \lim .\ \frac{1.2\cdots n}{a(a+1)\cdots(a+n)}\, n^a$$

$$\Gamma(1-a) = \lim .\ \frac{1.2\cdots n}{(1-a)(2-a)\cdots(n+1-a)}\, n^{1-a}$$

$$\Gamma(a)\,\Gamma(1-a) = \lim \frac{(1.2\cdots n)^2}{a(1+a)\cdots(n+a)(1-a)(2-a)\cdots(n+1-a)}\,n$$

$$= \lim \frac{1}{a(1+a)(1+\frac{a}{2})\cdots(1+\frac{a}{n})(1-a)(1-\frac{a}{2}\cdots(1-\frac{a}{n})(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n})}$$

$$= \lim \frac{1}{a(1-a^2)(1-\frac{a^2}{4})\cdots(1-\frac{a^2}{n^2})}$$

En supprimant le facteur $\left(1+\frac{1}{n}-\frac{a}{n}\right)$ qui tend vers l'unité quand n augmente indéfiniment.

Or on a $\sin a\pi = \lim a\pi(1-a^2)(1-\frac{a^2}{4})\cdots(1-\frac{a^2}{n^2})$ quand n augmente indéfiniment

Donc la limite du 2e membre est bien $\frac{\pi}{\sin a\pi}$

Théorème. – Nous avons démontré la formule

$$\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\,\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}\,2^{2x} = 2\sqrt{\pi}$$

lorsque x est entier ; cette formule est encore exacte lorsque x est quelconque ; en effet si elle est exacte pour $x = x_1$, elle l'est encore pour $x = x_1 + 1$. Car en faisant le changement de x en $x+1$ on multiplie le numérateur par $2^2 x\,(x+\frac{1}{2})$ et le dénominateur par $2x\,(2x+1)$

Il suffit donc d'établir que la formule est vérifiée lorsque l'on remplace x par $x+n$, n étant un entier aussi grand que l'on veut ; mais dans ce cas les 3 fonctions Γ qui figurent dans le 1er membre peuvent être remplacées par la valeur approchée que nous avons calculée et que nous avons démontrée être valable quel que soit n

Il vient alors :

$$\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\,\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{(x+\frac{1}{2})^{x+\frac{1}{2}} e^{-(x+\frac{1}{2})}\, x^x e^{-x}\,\sqrt{2\pi}\,\sqrt{2\pi}}{(2x)^{2x} e^{-2x} \sqrt{x}\,\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{e^{-\frac{1}{2}}\, x^{\frac{1}{2}} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+\frac{1}{2}} \sqrt{2}\,\sqrt{2\pi}}{2^{2x}\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$$

Or lorsque x augmente indéfiniment $\left(1+\frac{1}{2x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$ tend vers $e^{\frac{1}{2}}$ et $\sqrt{x+\frac{1}{2}}$ vers $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$. Il reste donc à la limite

$$\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\,\Gamma(x)}{\Gamma(2x)} = \frac{2\sqrt{\pi}}{2^{2x}}$$

d'où

$$\frac{\Gamma(x+\frac{1}{2})\,\Gamma(x)}{\Gamma(2x)}\,2^{2x} = 2\sqrt{\pi}$$

Généralisation. – La formule suivante due à Gauss est une généralisation de la précédente. Je dis que l'on a :

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\frac{1}{n})\,\Gamma(x+\frac{2}{n}) \cdots \Gamma(x+\frac{n-1}{n})}{\Gamma(nx)}\, n^{nx} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$$

En effet si cette formule est exacte pour une certaine valeur de x, elle l'est encore lorsque x augmente d'une

unité. Car le 1er membre se trouve multiplié par.

$$\frac{x\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x+\frac{2}{n}\right)\cdots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{nx\,(nx+1)\cdots(nx+n-1)}\,n^{n}$$

qui est évidemment égale à l'unité.

Il suffit donc comme précédemment d'établir que cette formule est exacte pour une valeur infiniment grande de x; ce qui permet d'employer la formule approchée

$$\Gamma(x) = \frac{\sqrt{2\pi}\; x^{x}\, e^{-x}}{\sqrt{x}}$$

On a alors :

$$\frac{\Gamma(x)\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)} = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} x^{x} e^{-x} \left(x+\frac{1}{n}\right)^{\left(x+\frac{1}{n}\right)} e^{-\left(x+\frac{1}{n}\right)} \cdots \left(x+\frac{n-1}{n}\right)^{x+\frac{n-1}{n}} e^{-\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}}{n\,x^{nx} e^{-nx}\sqrt{x}\;\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdots\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}}$$

$$= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\left[\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x}\left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x}\cdots\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)\right]^{x}\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}} e^{-\frac{1}{n}} e^{-\frac{2}{n}} e^{-\frac{n-1}{n}}\sqrt{nx}}{n^{nx}\sqrt{x}\;\sqrt{x+\frac{1}{n}}\cdots\sqrt{x+\frac{n-1}{n}}}$$

Si n augmente indéfiniment les facteurs

$\left(1+\frac{1}{nx}\right)^{x}, \left(1+\frac{2}{nx}\right)^{x}\cdots\left(1+\frac{n-1}{nx}\right)^{x}$ tendent respectivement vers

$e^{\frac{1}{n}} e^{\frac{2}{n}}\cdots e^{\frac{n-1}{n}}$

ils disparaissent avec les facteurs $e^{-\frac{1}{n}} e^{-\frac{2}{n}}\cdots e^{-\frac{n-1}{n}}$

et dans le facteur $\left(x+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\left(x+\frac{2}{n}\right)^{\frac{2}{n}}\cdots\left(x+\frac{n-1}{n}\right)^{\frac{n-1}{n}}$

les termes $\frac{1}{n}$ deviennent négligeables devant n et ceux-ci tendent vers x $x^{\frac{2}{n}}\cdots x^{\frac{n-1}{n}}$ dont le produit est égal à $x^{\frac{n-1}{2}}$

Enfin au dénominateur tous les radicaux tendent vers $\sqrt{x}$ et il reste pour la valeur du 1er membre

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{nx}}{n^{nx}\,x^{\frac{n}{2}}} = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}}{n^{nx}}$$

On a donc

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{n}\right)\cdots\Gamma\left(x+\frac{n-1}{n}\right)}{\Gamma(nx)}\,n^{nx} = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{n}$$

C.q.F.D.

En faisant dans cette formule $n=2$ on retombe sur la formule précédemment établie; si l'on y fait tendre x vers 0, il vient une formule due à Legendre.

Formule de Legendre. — Lorsque x tend vers 0, $\Gamma(x)$ et $\Gamma(nx)$ augmentent indéfiniment mais on a vu que $\Gamma(\varepsilon)$ a même limite que $\frac{1}{\varepsilon}$. [car $\Gamma(1+\varepsilon)$ tend vers $\Gamma(1)$ lorsque ε tend vers 0]. Donc $\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(nx)}$ a même limite que $\frac{nx}{x}$ c'est-à-dire tend vers n.

Les autres termes du numérateur tendent respectivement vers $\Gamma(\frac{1}{n}) \dots \Gamma(\frac{n-1}{n})$. Il vient donc divisant les 2 membres par n.

$$\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}}$$

Cette formule avait été établie par Legendre ainsi qu'il suit :

Soit $P = \Gamma(\frac{1}{n})\Gamma(\frac{2}{n})\cdots\Gamma(\frac{n-1}{n})$

On a aussi en renversant l'ordre des facteurs

$$P = \Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

d'où

$$P^2 = \left[\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]\left[\Gamma\left(\frac{2}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{2}{n}\right)\right]\cdots\left[\Gamma\left(\frac{n-1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{\sin.\frac{\pi}{n}}\ \frac{\pi}{\sin 2\frac{\pi}{n}}\ \cdots\cdots\ \frac{\pi}{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}$$

d'où

$$P = \frac{\pi}{\sqrt{\sin\frac{\pi}{n}\ \sin 2\frac{\pi}{n}\ \cdots\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n}}}$$

Mais comme nous allons l'établir

$$\sin\frac{\pi}{n}\ \sin\frac{2\pi}{n}\ \cdots\ \sin(n-1)\frac{\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$$

d'où $P = \dfrac{\pi^{\frac{n-1}{2}}\, 2^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} = 2\pi^{\frac{n-1}{2}}$

Pour calculer le produit

$$\sin\frac{\pi}{n}\ \sin\frac{2\pi}{n}\ \cdots\ \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

je considère l'équation

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = 0$$

C'est une équation binôme de degré pair ;

débarassée des racines ± 1 ; elle admet alors les racines :

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{n} \pm i \sin\frac{\pi}{n}$$
$$x_2 = \cos\frac{2\pi}{n} \pm i \sin\frac{2\pi}{n}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$x_4 = \cos\frac{(n-1)\pi}{n} \pm i \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$$

Je puis décomposer son premier membre en un produit de $(n-1)$ facteurs du 2e degré. Il vient ainsi :

$$\frac{x^{2n}-1}{x^2-1} = \left(x^2-2x\cos\frac{\pi}{n}+1\right)\left(x^2-2x\cos\frac{2\pi}{n}+1\right)\cdots\left(x^2-2x\cos\frac{(n-1)\pi}{n}+1\right)$$

Faisant $x=1$ dans les deux membres, le 1er prend la forme $\frac{0}{0}$ mais le rapport des dérivées donne pour la vraie valeur n. Il vient ainsi :

$$n = \left(2-2\cos\frac{\pi}{n}\right)\left(2-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(2-2\cos(n-1)\frac{\pi}{n}\right.$$

$$n = 4^{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin^2\left(\frac{n-1)\pi}{2\pi}\right. \qquad (1)$$

Substituant $x=-1$ dans les deux membres il vient :

$$n = 4^{4-1}\cos^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n} \qquad (2)$$

Multipliant les égalités (1) et (2) membre à membre il vient :

$$n^2 = 4^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{2n}\cos^2\frac{\pi}{2n}\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cos^2\frac{2\pi}{2n}\cdots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}\cos^2\frac{(n-1)\pi}{2n}.$$

$$\text{ou } n^2 = 4^{2(n-1)}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{2}\right)^2\left(\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{2}\right)^2\cdots\left(\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}{2}\right)^2$$

$$= 2^{2(n-1)}\sin^2\frac{\pi}{4}\sin^2\frac{2\pi}{n}\cdots\sin^2\frac{(n-1)\pi}{n}$$

D'où :

$$\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Théorème.

Nous avons établi incidemment dans la dernière leçon la formule $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

Cette formule très-importante peut être établie

directement ainsi qu'il suit :

Je pose $x = \frac{y}{1+y}$

Faisant le changement de variables, l'intégrale à calculer, que l'on désigne souvent par $B(a,b)$ devient :

$$B(a,b) = \int_0^\infty \frac{y^{a-1}}{(1+y)^{a-1}} \frac{1}{(1+y)^{b-1}} \frac{dy}{(1+y)^2} = \int_0^\infty \frac{y^{(a-1)}dy}{(1+y)^{a+b}}.$$

Mais d'après une formule connue on a

$$\frac{\Gamma(a+b)}{(1+y)^{a+b}} = \int_0^\infty e^{-x(1+y)} x^{a+b-1} dx$$

On peut donc écrire :

$$\Gamma(a+b) B(a,b) = \int_0^\infty y^{a-1} dy \int_0^\infty e^{-x(1+y)} x^{a+b-1} dx$$

$$= \int_0^\infty dx\, e^{-x} x^{a+b-1} \int_0^\infty e^{-xy} y^{a-1} dy$$

or $\int_0^\infty e^{-xy} y^{a-1} dy = \frac{\Gamma(a)}{x^a}$

Il vient :

$$\Gamma(a+b) B(a,b) = \Gamma(a) \int_0^\infty e^{-x} x^{b-1} dx = \Gamma(a)\Gamma(b)$$

D'où

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

(int. eulér. de 1re espèce)

C. q. F. D.

6e Leçon.

Propriétés de la fonction Γ (suite) Applications.

De la formule :

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} = B(a,b)$$

on peut déduire plusieurs autres formules importantes.-

Soit à calculer l'intégrale

$$u = \int_0^1 x^{m-1}(1-x^p)^{n-1}\,dx \qquad (\text{diff. binôme})$$

p étant un exposant quelconque.

Je pose $x^p = y$

Il vient :

$$u = \int_0^1 y^{\frac{m-1}{p}}(1-y)^{n-1}\,\frac{1}{p}\,y^{\frac{1}{p}-1}\,dy = \frac{1}{p}\int_0^1 y^{\frac{m}{p}-1}(1-y)^{n-1}\,dy = \frac{1}{p}\,\frac{\Gamma\left(\frac{m}{p}\right)\Gamma(n)}{\Gamma\left(\frac{m}{p}+n\right)}$$

Applications.-

On déduit de la formule précédente la valeur de l'intégrale :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$$

On en déduit de même

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{4}\,\frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

D'où, en faisant le produit :

$$\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^4}} \times \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{16}\,\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}$$

Mais $\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$ et $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

Ce qui donne pour le produit des deux intégrales la valeur $\frac{\pi}{4}$

De la formule fondamentale

$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,dx$$

on peut déduire la suivante que nous avons établie précédemment :-

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma(x+\frac{1}{2})}{\Gamma(2x)}\,2^{2n-1}=\sqrt{\pi}$$

En effet, je pose $x=\frac{1-y}{2}$

D'où

$$1-x=\frac{1+y}{2}$$

Faisant la substitution, il vient :

$$B(a,b)=\int_{+1}^{-1}\left(\frac{1-y}{2}\right)^{a-1}\left(\frac{1+y}{2}\right)^{b-1}\left(-\frac{dy}{2}\right)=\frac{1}{2^{a+b-1}}\int_{-1}^{+1}(1-y)^{a-1}(1+y)^{b-1}\,dy$$

Faisant $a=b$ dans cette formule, il vient :

$$B(a,a)=\frac{1}{2^{2a-1}}\int_{-1}^{+1}(1-y^2)^{a-1}\,dy$$

Mais l'intégrale du 2e membre est évidemment égale à

$2\int_0^1(1-y^2)^{a-1}\,dy$ puisque la fonction intégrée est paire ; or cette dernière intégrale est celle que nous venons de calculer ; il vient donc en remplaçant $B(a,a)$ en fonction de Γ

$$\frac{[\Gamma(a)]^2}{\Gamma(2a)}=\frac{1}{2^{2(a-1)}}\times\frac{1}{2}\,\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(a)}{\Gamma(a+\frac{1}{2})}$$

D'où

$$\frac{\Gamma(a)\,\Gamma(a+\frac{1}{2})}{\Gamma(2a)}\cdot 2^{2a-1}=\sqrt{\pi}$$

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$ Nous avons calculé (cours de 1ère année p. 272), l'intégrale :

$$u=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^m x\cos^n x\,dx$$

lorsque m et n sont entiers. – Lorsque m et n sont fractionnaires,

elle peut être exprimée à l'aide de la fonction Γ. – Pour cela, je pose

$\sin x = y$ Il vient :

$$u = \int_0^1 y^m (1-y^2)^{\frac{n-1}{2}} dy = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}+1\right)}$$

Si m et n sont entiers, on connaît les expressions de ces trois fonctions Γ à l'aide de π et des factorielles. –

Faisant $m = n$, il vient :

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^m x \, dx = \frac{1}{2} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(m+1)}$$

Mais $\sin^m x \cos^m x = \frac{1}{2^m} \sin^m 2x$

Le 1er membre de (1) est donc égal à :

$$\frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m 2x \, dx = \frac{1}{2^{m+1}} \int_0^{\pi} \sin^m y \, dy = \frac{1}{2^m}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m y \, dy$$

en posant $y = 2x$

Mais cette dernière intégrale rentre dans la forme générale précédente, et l'on a :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m y \, dy = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)}$$

Portant dans (1), il vient :

$$\frac{1}{2^m} \frac{\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{m}{2}+1\right)} = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{m+1}{2}\right)\right]^2}{\Gamma(m+1)}$$

Posant $m+1 = 2x$, on retrouve la formule :

$$\frac{\Gamma(x)\,\Gamma\left(x+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(2x)} 2^{2x-1} = \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

Problème : (Abel).-

Trouver quelle est la courbe suivant laquelle il faut laisser tomber un point matériel pesant pour qu'il parvienne en un point O. (que nous prendrons pour origine des coordonnées), au bout d'un temps qui soit une fonction donnée $F(h)$ de la hauteur de chute h.-

Je considère une des positions intermédiaires du mobile ; soit z sa hauteur ; il est animé d'une vitesse :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(h-z)}$$

On déduit de là :

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{2g(h-z)}}$$

La durée de chute jusqu'en O est alors égale à :

$$T = \frac{1}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{ds}{\sqrt{h-z}}$$

C'est ce temps T qui doit être égal à la fonction donnée $F(h)$

Pour déterminer la courbe, nous chercherons la relation qui existe entre l'arc s compté à partir du point o, et l'ordonnée z, et nous supposerons que s est une fonction de z que l'on peut développer en série sous la forme

$$\Sigma A z^m$$

Alors, la différentielle ds pourra aussi être développée en série, sous la forme

$$ds = \sum a\, z^{m-1} dz$$

en posant $a = mA$

et T sera de la forme :

$$(1)\quad T = F(h) = \Sigma \frac{a}{\sqrt{2g}}\int_0^h \frac{z^{m-1}dz}{\sqrt{h-z}}$$

Je pose :

$$u = \int_0^h \frac{z^{m-1}\,dz}{\sqrt{h-z}}$$

Cette intégrale se ramène immédiatement aux fonctions Γ en posant

$$z = h\,y$$

Il vient :

$$u = \int_0^1 \frac{h^{m-1}y^{m-1}}{\sqrt{h-hy}}\cdot h\,dy$$

$$= h^{m-\frac{1}{2}}\int_0^1 y^{m-1}(1-y)^{-\frac{1}{2}}\,dy = h^{m-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}$$

Portons dans (1). Il vient :

$$(2)\qquad F(h) = \Sigma\,\frac{a}{2g}\;h^{m-\frac{1}{2}}\,\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}$$

Le but du calcul est d'obtenir l'expression de S, c'est-à-dire

$$\Sigma A z^m = \Sigma\,a\,\frac{z^m}{m}$$

à un facteur constant près.

Pour introduire cette expression dans le second membre, et y faire disparaître les fonctions $\Gamma(m)$ et $\Gamma(m+1)$, Abel multiplie les deux membres de l'équation (2) par $\frac{dh}{\sqrt{z-h}}$ et prend l'intégrale entre les limites $h=0$ et $h=z$.

Il vient ainsi :

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = \Sigma\,\frac{a}{\sqrt{2g}}\,\frac{\Gamma(m)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+\frac{1}{2})}\int_0^z \frac{h^{m-\frac{1}{2}}\,dh}{\sqrt{z-h}}$$

Mais l'intégrale

$\int_0^z \frac{h^{m-\frac{1}{2}}\,dh}{\sqrt{z-h}}$ se ramène aux fonctions Γ

en posant : $h = zu$ Elle devient :

$$z^m \int_0^1 h^{m-\frac{1}{2}} (1-h)^{-\frac{1}{2}} dh = z^m \frac{\Gamma(m+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(m+1)}$$

Remplaçant cette intégrale par sa valeur dans l'équation précédente, il vient :

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = \Sigma \frac{a}{\sqrt{2g}} z^m \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)}$$

Mais $\Gamma(m+1) = m\,\Gamma(m)$

Il reste donc :

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\left[\Gamma(\frac{1}{2})\right]^2}{\sqrt{2g}} \Sigma m a z^m = \frac{\pi}{\sqrt{2g}} s$$

Et par suite :

$$s = \frac{\sqrt{2g}}{\pi} \int_0^z \frac{F(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}$$

Cette équation résout complètement le problème ; car elle fait connaître s en fonction de z.

Supposons que $F(h)$ soit une constante $\frac{\tau}{2}$, il vient :

$$s = \frac{\sqrt{2g}}{2\pi} \int_0^z \frac{\tau\,dh}{\sqrt{z-h}} = \frac{\tau\sqrt{2g}}{2\pi} \left(-2\sqrt{z-h}\right)^z = \frac{\tau}{\pi}\sqrt{2gz}$$

Donc l'arc de la courbe cherchée est proportionnel à $\sqrt{z}$; cela définit la cycloïde. — C'est là un résultat bien connu.

La formule précédente donne

$$s^2 = 8z \frac{g\tau^2}{4\pi^2}$$ (voir Cours de mécanique de 1ère année p 195) ;

Le rayon du cercle générateur de la Cycloïde est ici égal à $\frac{g\tau^2}{4\pi^2}$

Problème plus général.

Etant donnée l'intégrale

$$\int_0^h \frac{ds}{(h-z)^p}$$

que l'on suppose être une fonction donnée de h F(h),
trouver l'expression de s en fonction de z.-

Pour résoudre ce problème, je suppose s
développable en série de puissances par rapport à z.

soit $s = \sum a z^m$

On en déduit :

$$ds = \sum m a z^{m-1}$$

ou en posant $m a = A$

$$ds = \sum A z^{m-1}$$

Alors, l'intégrale considérée devient :

$$\sum A \int_0^h \frac{z^{m-1}}{(h-z)^p}$$

Je pose $z = hy$; l'intégrale devient :

$$\sum A h^{m-p} \int_0^1 y^{m-1} dy\, (1-y)^{-p}$$

$$= \sum A h^{m-p} \frac{\Gamma(m)\Gamma(1-p)}{\Gamma(m+1-p)}$$

On a donc :

$$F(h) = \sum A h^{m-p} \frac{\Gamma(m)\Gamma(1-p)}{\Gamma(m+1-p)}$$

Pour introduire $\frac{A}{m} z^m$ dans le 2e membre, je
multiplie de part et d'autre par

$\frac{dh}{(z-h)^{1-p}}$, et j'intègre entre 0 et z.

Il vient ainsi

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{(z-h)^{1-p}} = \Sigma A \frac{\Gamma(m)\,\Gamma(1-p)}{\Gamma(m+1-p)} \int_0^z \frac{h^{m-p}\,dh}{(z-h)^{1-p}} \qquad (1)$$

Or en posant $h = zu$, l'intégrale

$$\int_0^z \frac{h^{m-p}\,dh}{(z-h)^{1-p}} \quad \text{devient :}$$

$$z^m \int_0^1 u^{m-p}(1-u)^{p-1}\,du = z^m \frac{\Gamma(m-p+1)\,\Gamma(p)}{\Gamma(m+1)}$$

Portant dans l'équation (1), il vient :

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{(z-h)^{1-p}} = \Sigma A\, z^m \frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m+1)}\,\Gamma(p)\,\Gamma(1-p)$$

ou :

$$\int_0^z \frac{F(h)\,dh}{(z-h)^{1-p}} = \Sigma \frac{A}{m} z^m \frac{\pi}{\sin p\pi}$$

mais $\quad \Sigma \frac{A}{m} z^m = s$

On a donc : $\quad s = \frac{\sin p\pi}{\pi} \int_0^z \frac{F(h)\,dh}{(z-h)^{1-p}}$

Cette formule résout complètement le problème proposé.

Si l'on remarque que

$$F(h) = \int_0^h \frac{ds}{(h-z)^p}$$

la formule peut s'écrire en posant $s = \varphi(z)$

$$\frac{\pi}{\sin p\pi}\,\varphi(z) = \int_0^z \frac{dh}{(z-h)^{1-p}} \int_0^h \frac{\varphi'(z)\,dz}{(h-z)^p}$$

la fonction $\varphi(z)$ étant une fonction absolument quelconque, que l'on suppose seulement développable en série.

$\int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^n}$ Soit à calculer l'intégrale :

$$u = \int_0^\infty \frac{\sin x\,dx}{x^n}$$

Nous avons déjà calculé cette intégrale dans le cas où $n = 1$ (Cours de 2e année p. 24),

Dans le cas où $n = \frac{1}{2}$, on peut la calculer directement par une méthode identique à celle employée page 21. – Nous allons donner l'expression de cette intégrale pour une valeur de n quelconque entre 0 et 1. –

On sait que l'on a :

$$\frac{\Gamma(n)}{x^n} = \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{n-1} d\alpha$$

Remplaçant $\frac{1}{x^n}$ par cette valeur dans l'intégrale à calculer, il vient :

$$u = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \sin x\,dx \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{n-1} d\alpha$$

$$= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \alpha^{n-1} d\alpha \int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\,dx$$

Or

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x} \sin x\,dx = \frac{1}{1+\alpha^2}$$

Donc : $$u = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\alpha^{n-1} d\alpha}{1+\alpha^2}$$

Posant $\alpha^2 = \beta$, il vient :

$$u = \frac{1}{2\Gamma(n)} \int_0^\infty \frac{\beta^{\frac{n}{2}-1}}{1+\beta} d\beta$$

Mais cette dernière intégrale a été calculée (Cours de 2e année p. 28), elle est égale à $\frac{\pi}{\sin \frac{n}{2}\pi}$

Il vient donc :

$$u = \frac{\pi}{2\Gamma(n)\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}$$

Faisant $n = 1$ ou $n = \frac{1}{2}$, on retrouve les résultats déjà établis :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x^2\, dx}{x} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2}}$$

7e Leçon.

Intégration des fonctions d'une variable imaginaire.

Soit une variable imaginaire

$$Z = x + yi$$

et une fonction de cette variable

$$F(z) = P + Qi$$

Nous avons convenu (Cours de 1ère Année 15ème Leçon) de ne considérer $P + Qi$ comme une fonction de Z que si cette expression admet une dérivée par rapport à Z, c'est-à-dire si lorsqu'on donne à Z un accroissement infiniment petit $(dx + i\, dy)$ il en résulte pour $P + Qi$ un accroissement $dP + i\, dQ$ dont le rapport à l'accroissement de Z tend vers une limite déterminée de quelque manière que $dx + i dy$ tende vers 0.

Nous avons vu que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi, est que l'on ait

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dQ}{dy}$$

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$

Proposons nous de chercher si une telle fonction, qui admet une dérivée, admet aussi une intégrale.

On a $\int F(z)dz = \int (P+Qi)(dx+idy) = \int (Pdx - Qdy) + i\int (Pdy + Qdx)$

L'intégration de $F(z)dz$ se ramène donc à celle de deux différentielles de la forme $Mdx + Ndy$.-

Or une telle différentielle n'est généralement pas intégrable, car il n'existe généralement pas de fonction de x et de y dont la différentielle totale soit $Mdx+Ndy$.

Théorème.- Pour qu'une telle différentielle soit intégrable il faut et suffit que l'on ait

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

En effet soit U l'intégrale cherchée. On a par définition

$$dU = Mdx + Ndy$$

c'est-à-dire

$$M = \frac{dU}{dx}$$

$$N = \frac{dU}{dy}$$

Si M est la dérivée de U par rapport à x on aura

$$U = \int_{x_0}^{x} Mdx + C$$

C étant une constante par rapport à x, c'est-à-dire une fonction de y seulement; soit Y cette fonction: Y sera déterminée par la condition:

$$\frac{dU}{dy} = N$$

c'est-à-dire

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx + \frac{dY}{dy} = N$$

D'où

$$\frac{dY}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx \qquad (1)$$

Cette équation détermine Y par sa dérivée, il suffira donc pour obtenir Y de faire une intégration ; par définition Y est indépendant de x, donc sa dérivée l'est aussi. –

Il faut donc, et il suffit pour qu'on puisse déterminer Y, que le 2e membre de (1) soit indépendant de x, ou que sa dérivée par rapport à x soit nulle, c'est-à-dire que l'on ait

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}$$

Telle est la condition necessaire et suffisante cherchée.

Il était évident à priori que cette condition était nécessaire, car $\frac{dM}{dy}$ et $\frac{dN}{dx}$ sont les dérivées secondes $\frac{d^2V}{dy\,dx}$ et $\frac{d^2V}{dx\,dy}$ qui sont identiques. –

Le calcul précédent montre que cette condition est suffisante et il permet de calculer V lorsque cette condition est satisfaite.

Revenons à l'intégration de la fonction F(Z).

On a $$\int F(Z)\,dZ = \int P\,dx - Q\,dy + i\int P\,dy + Q\,dx$$

Les 2 conditions nécessaires et suffisantes pour que les 2 intégrales du 2e membre existant, sont d'après ce qui précède :

$$\frac{dP}{dy} = -\frac{dQ}{dx}$$

$$\frac{dQ}{dy} = \frac{dP}{dx}$$

Ce sont précisément les conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction F(Z) admette une dérivée. On peut donc énoncer ce théorème :

Théorème. — Toute fonction d'une variable imaginaire qui admet une dérivée admet aussi une intégrale et réciproquement. —

Il s'ensuit immédiatement qu'une telle fonction admet une série d'intégrales et de dérivées successives.

En effet soit la fonction $F(z)$ qui admet une dérivée $F'(z)$; $F'(z)$ admet $F(z)$ comme intégrale, donc elle admet une dérivée $F''(z)$ qui pour la même raison admettra une dérivée $F'''(z)$ et ainsi de suite. —

De même $F(z)$ admettant une dérivée admettra une intégrale $F_1(z)$: celle-ci admettant $F(z)$ comme dérivée admettra une intégrale $F_2(z)$ et ainsi de suite. —

Intégration entre deux limites..

Soit une fonction de z, $F(z)$ admettant une dérivée; elle admet par suite une intégrale $\varphi(z)$ et l'on a

$$\int F(z)\,dz = \varphi(z)$$

ce qui équivaut à dire que l'on a

$$F(z) = \varphi'(z)$$

Comme pour les fonctions de variables réelles nous appellerons intégrale définie de $F(z)\,dz$ entre les limites A et B la somme des valeurs de cette expression lorsque z varie de A et B par accroissements infiniment petits, et cette intégrale définie sera égale à la différence des valeurs de $\varphi(z)$ lorsque l'on y remplace successivement z par B puis par A: de telle sorte que nous pourrons écrire

$$\int_A^B F(z)\,dz = \varphi(B) - \varphi(A) \qquad (2)$$

Cette équation exprime, comme dans le cas des variables réelles, l'égalité des accroissements de la fonction φ évalués de deux manières différentes.- Elle ne peut évidemment être exacte que lorsque la fonction φ reste bien déterminée quand z varie de A à B.

Intégration le long d'un Contour.-

L'équation (2) montre que la valeur de l'intégrale définie $\int_A^B F(z)\,dz$ ne dépend que des valeurs des limites A et B et nullement des valeurs intermédiaires par lesquelles on fait passer la variable z.

Nous pouvons encore dire (en supposant que nous représentions la variable z sur un plan par un point d'abscisse x et d'ordonnée y) que cette intégrale est indépendante du contour AMB que l'on fait décrire au point représentatif, entre les deux points extrêmes A et B ; ou encore, comme on dit, elle est indépendante du contour le long duquel on intègre entre les points A et B.

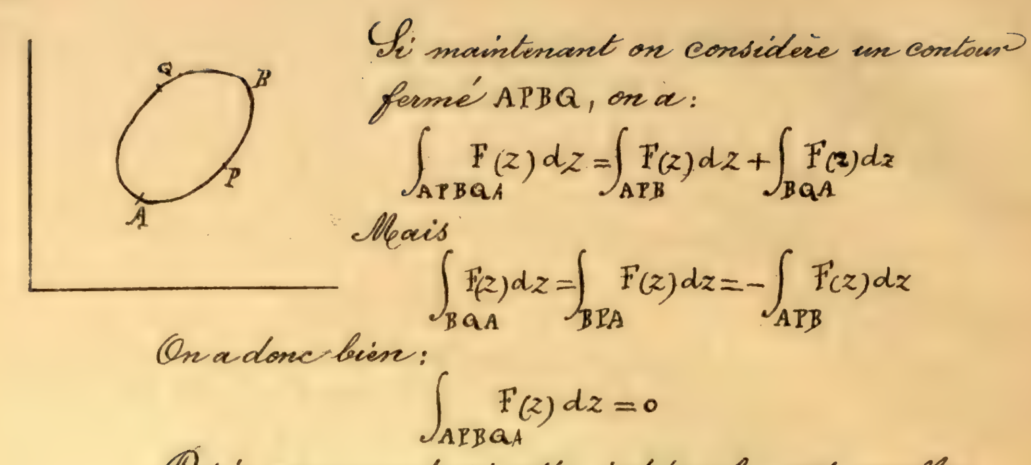
Il résulte immédiatement de là que lorsque l'on intègre la fonction $F(z)$ le long d'un contour fermé, l'intégrale est nulle.-

Cet énoncé est équivalent au précédent.

En effet on remarque immédiatement que l'on a :

$$\int_A^B F(z)\,dz = -\int_B^A F(z)\,dz$$

car tous les éléments de la 1ère intégrale sont égaux à ceux de la 2ème changés de signe.



Si maintenant on considère un contour fermé APBQ, on a :

$$\int_{APBQA} F(z)\,dz = \int_{APB} F(z)\,dz + \int_{BQA} F(z)\,dz$$

Mais

$$\int_{BQA} F(z)\,dz = \int_{BPA} F(z)\,dz = -\int_{APB} F(z)\,dz$$

On a donc bien :

$$\int_{APBQA} F(z)\,dz = 0$$

Réciproquement si cette intégrale est nulle

$$\int_{APB} F(z)\,dz = -\int_{BQA} F(z)\,dz = \int_{AQB} F(z)\,dz$$

Cas d'exceptions.–

Ces deux énoncés subissent de très nombreuses exceptions ; en effet ils résultent immédiatement de l'équation (2) qui, comme nous l'avons dit, peut tomber en défaut lorsque la fonction φ est mal déterminée car son accroissement entre deux valeurs A et B de la variable peut dépendre des valeurs intermédiaires données à celles-ci.

Tel est d'ailleurs le seul cas où l'équation (2) peut n'être pas exacte – Les théorèmes précédents seront donc applicables toutes les fois que la fonction φ sera bien déterminée, et pourront tomber en défaut dans le cas contraire. Mais ce caractère porte sur la considération de la fonction φ elle-même. Or elle n'est généralement pas connue et on cherche à l'étudier ou à la connaître à l'aide de ces théorèmes ; il faut donc chercher un caractère qui repose sur la considération de la fonction donnée $F(z)$.

Nous allons établir que l'intégrale prise le long d'un contour fermé ne peut différer de 0 que lorsque la fonction à intégrer est <u>mal déterminée</u>

ou lorsqu'elle devient infinie pour un ou plusieurs points situés à l'intérieur du contour.

Exemple.– Considérons l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$ qui est égale à $L(z)$.

$L(z)$ est comme on sait (Cours de 1ère année page 102) indéterminé lorsque z peut tourner autour de l'origine c'est-à-dire à l'intérieur de tout contour enfermant l'origine.

Il s'en suit que l'intégrale $\int \frac{dz}{z}$ prise le long d'un contour fermé enfermant l'origine peut ne pas être nulle.

Cela résulte aussi du théorème que nous venons d'énoncer car $\frac{1}{z}$ devient infini par $z = 0$

Pour le vérifier, j'intègre le long du cercle de rayon R décrit de l'origine comme centre c'est-à-dire que si je pose

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

je ferai varier φ de 0 à 2π

On a $\quad dz = R(-\sin\varphi + i\cos\varphi)\,d\varphi$

et $\quad \frac{dz}{z} = \frac{(-\sin\varphi + i\cos\varphi)}{(\cos\varphi + i\sin\varphi)}\,d\varphi = i\,d\varphi$

Et l'intégrale

$\int \frac{dz}{z}$ prise le long du cercle est égale à $\int_0^{2\pi} i\,d\varphi = 2\pi i$

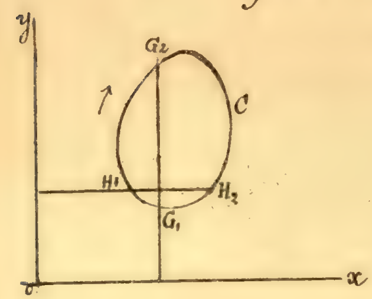
Théorème.– Pour établir le théorème que nous venons d'énoncer nous allons considérer une fonction de z que nous supposerons bien définie et démontrer à nouveau que l'intégrale prise le long d'un contour fermé est nulle. La démonstration que nous allons donner ne peut, comme cela est évident, tomber en défaut que lorsque la fonction devient infinie à l'intérieur du contour.

Soit en effet la fonction :

$$F(z) = P + Q_1 i$$

dont je considère l'intégrale le long du contour fermé C; on a :

$$\int F(Z)\,dZ = \int (P\,dx - Q\,dy) + i\int (Q_1\,dx + P\,dy)$$



D'autre part puisque $P + Q_1 i$ est supposé admettre une intégrale, on a :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dy} = -\dfrac{dQ_1}{dx} \\[2mm] \dfrac{dP}{dx} = \dfrac{dQ_1}{dy} \end{cases}$$

ou

$$\frac{dP}{dy} + \frac{dQ_1}{dx} = 0$$

$$\frac{dP}{dx} - \frac{dQ_1}{dy} = 0$$

De la 1ère de ces équations il résulte que l'intégrale double :

$$V = \iint \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ_1}{dx}\right) dx\,dy$$

est nulle quelle que soit la région dans laquelle on intègre. J'intègre à l'intérieur du contour C. L'intégrale double V représentera le volume d'un cylindre droit ayant pour base l'aire C et une hauteur nulle égale à $\dfrac{dP}{dy} + \dfrac{dQ_1}{dx}$

On a :

$$V = \iint \left(\frac{dP}{dy} + \frac{dQ_1}{dx}\right) dx\,dy = \iint \frac{dP}{dy}\,dx\,dy + \iint \frac{dQ_1}{dx}\,dx\,dy.$$

Dans chacune de ces intégrales doubles, l'une des intégrations est immédiate et il vient

$$V = \int (P_2 - P_1)\,dx + \int (Q_{1,2} - Q_{1,1})\,dy$$

P_2 et P_1 représentant les valeurs que prend P lorsqu'on y remplace successivement y par les ordonnées des deux points G_2 et G_1 où la droite d'abscisse x coupe la courbe.

Q_2 et Q_1 représentant les valeurs de Q lorsqu'on remplace x par les abscisses des points H_2 et H_1

La 1ère de ces intégrales doit être étendue à toute l'aire C. Elle est évidemment égale à l'intégrale $\int P dx$ prise le long du Contour G dans le sens de la flèche, la 2e est de même égale à $-\int Q dy$ prise le long du contour dans le même sens.

On a donc :

$$V = \int P dx - \int Q dy$$

Ces deux intégrales étant prises le long du contour dans le même sens, leur somme peut encore être représentée par $\int P dx - Q dy$, cette intégrale étant elle-même prise le long du contour dans ce même sens.

Or l'intégrale V est nulle ; on a donc :

$$\int P dx - Q dy = 0.$$

De l'équation $\frac{dP}{dx} = -\frac{dQ}{dy}$

On déduira de même que l'intégrale

$\int Q dx - P dy$ prise le long du contour est nulle.

Donc l'intégrale $\int F(z) dz = \int P dx - Q dy + i \int Q dx + P dy$ prise le long du contour fermé C est nulle.

C. Q. F. D.

Exceptions. - Les calculs et les raisonnements précédents ne sont en défaut que si les intégrales que nous avons considérées contiennent des éléments infinis c'est-à-dire si P ou Q deviennent infinis pour un point quelconque

situé à l'intérieur de la courbe C. C'est là le seul cas d'exception qui puisse se présenter si nous supposons la fonction F bien déterminée. Les points pour lesquels la fonction F devient infinie sont dits points critiques.

Cas où la fonction F(z) admet des points critiques à l'intérieur du contour.

Les théorèmes qui suivent nous permettront d'évaluer la valeur de l'intégrale F(Z) le long d'un contour fermé contenant les points critiques.

Théorème. - Si on considère une intégrale prise le long d'un contour enfermant des points critiques sa valeur ne change pas si on la prend le long d'un autre contour enfermant les mêmes points critiques.

En effet soit C le contour donné enfermant les points critiques $P_1 P_2 \ldots P_n$ et C' un nouveau contour enfermant les mêmes points critiques, c'est-à-dire que dans l'espace non commun à C et C' ne se trouve aucun point critique.

L'intégrale prise le long du contour fermé constitué par C et C' (contour qui peut se composer de deux parties fermées ne se rencontrant pas) est nulle; cela pourrait se démontrer exactement comme dans le cas d'un contour unique.

Or cette intégrale prise le long de ce double contour se compose des intégrales prises le long de C et de C' en sens inverse l'une de l'autre c'est-à-dire est égale à la différence des intégrales prises le long de C et de C' dans le sens direct, cette différence étant nulle, les deux intégrales sont égales.

C. Q. F. D.

Ce résultat peut encore être établi ainsi qu'il suit: je joins les contours C C' par deux segments de droite AA', BB' infiniments voisins; et je considère l'intégrale prise dans le sens de la flèche le long du contour fermé CAA'C'B'BC; ce contour n'enfermant aucun point critique l'intégrale

est nulle. (Ce théorème général a été démontré sur une figure plus simple dans laquelle une droite ne coupait le contour qu'en deux points; mais la démonstration subsiste encore exactement dans un cas tel que celui-ci). Or lorsque AA' et BB' seront infiniment voisins, cette intégrale sera la somme de l'intégrale prise le long de C' en sens direct, de l'intégrale le long de C'' en sens inverse et de deux intégrales prises le long de deux segments de droite infiniment voisins et en sens inverse. La somme de ces deux dernières étant évidemment nulle, la somme des deux premières l'est aussi; et par conséquent ces deux premières intégrales prises dans le même sens sont égales.

Il en résulte cet autre théorème:

C.Q.F.D.

Théorème. – L'intégrale prise le long d'un contour C est égale à la somme des intégrales prises dans le même sens le long de contours quelconques enfermant les différents points critiques.

En effet soit le contour γ enfermant les points critiques $P_1\ P_2\ P_3$; je considère 3 courbes quelconques entourant chacun de ces points critiques et je les joins au contour γ et entre elles par les systèmes de droites infiniment voisines AB – MN. CD – KL EF – GH. L'intégrale prise comme l'indiquent les flèches le long du contour $\gamma ABCDEFGHKLMN\gamma$ est évidemment nulle; mais elle se réduit comme précédemment à la somme des intégrales prises le long de γ dans le sens direct et le long des trois contours $P_1\ P_2\ P_3$ en sens inverse. Donc l'intégrale prise le long du 1er contour est égale à la somme des intégrales prises le long de trois autres et dans le même sens. Ce théorème permet immédiatement de ramener le calcul d'une intégrale prise le long d'un contour fermé quelconque au calcul de cette intégrale prise le long de plusieurs contours fermés arbitraires enfermant chacun l'un des points critiques; nous choisirons généralement pour ces contours des cercles de rayon aussi petit que l'on voudra décrits du point critique comme centre. On est ramené au problème suivant.



Problème. – Calculer la valeur d'une intégrale prise le long d'un cercle de rayon aussi petit que l'on voudra décrit d'un point critique comme centre.

Soit P_1 le point critique et $\gamma = \alpha + \beta i$ la valeur de l'imaginaire à laquelle il correspond.

La fonction $F(z)$ devient donc infinie pour $z = \gamma$. Pour faire l'intégration le long du cercle il suffira de donner à z les valeurs

$$z = \gamma + R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

où R est le rayon du petit cercle et où φ sera seul variable et variera de 0 à 2π.

La fonction F devenant infinie pour $z = \gamma$ il peut exister un exposant entier n tel que $(z-\gamma)^n F(z)$ reste fini et différent de 0 lorsqu'on y fait $z = \gamma$. C'est ce que nous supposerons dans ce qui suit ; le résultat du calcul ne sera donc applicable que si la fonction à intégrer satisfait à cette condition.

Le produit $(z-\gamma)^n F(z)$ est une nouvelle fonction de z, $\varphi(z)$ que je suppose développable en série suivant les puissances croissantes de $(z-\gamma)$, série que je suppose de plus convergente.

S'il en est ainsi on aura :

$$\varphi(z) = A_0 + A_1(z-\gamma) + A_2(z-\gamma)^2 + \cdots + A_{n-1}(z-\gamma)^{n-1} + A_n(z-\gamma)^n + A_{n+1}(z-\gamma)^{n+1} \cdots$$

$$F(z) = \frac{A_0}{(z-\gamma)^n} + \frac{A_1}{(z-\gamma)^{n-1}} + \cdots + \frac{A_{n-1}}{(z-\gamma)} + A_n + A_{n+1}(z-\gamma) + \cdots$$

L'intégrale de $F(z)$ le long du cercle est évidemment égale à la somme des intégrales de ces différents termes.

On a ici $(z-\gamma) = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$dz = R\,d\varphi(-\sin\varphi + i\cos\varphi$$

Tous les termes à partir de A_n donneront des intégrales dont l'élément contiendra une puissance de R en facteur et dont les autres facteurs seront finis, donc lorsque R sera infiniment petit toutes ces intégrales

auront leurs éléments infiniment petits ; elles seront donc toutes nulles. Il ne reste à considérer que les termes de la forme

$$\frac{A}{(Z-\gamma)^p}$$

En intégrant le long du cercle ils donneront les intégrales de la forme

$$A\int_0^{2\pi} \frac{R\,d\varphi(-\sin\varphi + i\cos\varphi)}{R^p(\sin\varphi + i\cos\varphi)^p} \qquad \text{ou}$$

$$+Ai\int_0^{2\pi} \frac{[\cos(1-p)\varphi + i\sin(1-p)\varphi]}{R^{p-1}}\,d\varphi = \frac{Ai}{(1-p)R^{p-1}}\left[\sin(1-p)\varphi - i\cos(1-p)\varphi\right]_0^{2\pi}$$

Or cette intégrale est nulle quelle ~~que~~ petite que soit la valeur donnée à R ; elle le sera donc encore à la limite.

Cela est vrai pour toute valeur de p sauf $p=1$. Dans ce cas l'intégrale se réduit à

$$+A_{n-1}i\int_0^{2\pi} d\varphi = +2\pi A_{n-1}i$$

L'intégrale de $F(Z)$ prise le long de ce cercle se réduit donc à $+2\pi i \cdot A_{n-1}$

Le coefficient A_{n-1} est ce que l'on appelle le résidu de la fonction F par rapport au point critique considéré.

Nous arrivons donc à ce résultat :

L'intégrale d'une fonction prise le long d'un cercle infiniment petit décrit autour d'un point critique est égal au produit du résidu de la fonction par rapport à ce point critique par $2\pi i$.

Il résulte alors immédiatement des théorèmes démontrés précédemment que l'intégrale d'une fonction bien déterminée (ou comme l'on dit monodrome) prise le long d'un contour fermé est égale à $2\pi i$ que multiplie la somme des résidus de la fonction par rapport aux différents points critiques situés à l'intérieur du contour.

8e Leçon.

Nous avons vu que si l'on considère une fonction de z monodrôme, c'est-à-dire une fonction ayant une valeur bien déterminée pour chaque valeur de z, l'intégrale de cette fonction prise le long d'un contour fermé est égale à $2\pi i$ que multiplie la somme des résidus de la fonction par rapport aux points critiques contenus à l'intérieur du contour.

Intégration le long d'une ligne non fermée.

De ce théorème général on déduit immédiatement une propriété des intégrales prises le long d'un contour non fermé.

Je considère l'intégrale $\int F(z)\,dz$ prise entre deux points A et B en suivant la courbe AMB et cette intégrale prise entre les deux mêmes points, mais suivant une autre courbe AM'B. Appliquant au contour fermé AMBM'B le théorème que nous venons de rappeler il vient

$$\int_{AM'BM'A} = 2\pi i \sum R$$

$\sum R$ représentant la somme des résidus de la fonction par rapport aux points critiques situés à l'intérieur du contour.

Mais

$$\int_{AMBM'A} = \int_{AMB} + \int_{BM'A} = \int_{AMB} - \int_{AM'B}$$

On a donc

$$\int_{AMB} - \int_{AM'B} = 2\pi i \sum R$$

Les deux intégrales seront donc égales toutes les fois qu'il n'y aura pas de points critiques compris

entre les deux lignes AMB et AM'B. Il est aisé de voir comment se produit le changement de valeur de l'intégrale. — Supposons par exemple qu'entre les deux courbes il n'existe qu'un seul point critique P; tant que la courbe suivant laquelle nous intégrons reste à droite de ce point, l'intégrale garde sa valeur primitive et sitôt que la courbe passe à gauche, l'intégrale augmente brusquement de $2\pi R i$.

Pour le constater, je considère un cercle infiniment petit, de centre P coupé par la droite AB en C et D. Si j'intègre le long du contour ACmDB, l'intégrale a la même valeur que si j'intègre le long de AMB; si au contraire, j'intègre le long du contour ACm'DB, l'intégrale a la même valeur que le long de AM'B. — D'ailleurs, la différence des deux intégrales prises le long des deux contours ACmDB et ACm'DB est égale à la différence des éléments relatifs à deux demi-cercles, c'est-à-dire à

$$\int_{CmD} - \int_{Cm'D} = \int_{CmDm'C}$$

Or cette dernière intégrale est précisément égale à $2\pi i R$

Application à la fonction L(z)

On sait que lorsque z est réel, on a:

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = L(z)$$

Nous pouvons prendre cette équation comme définition de la fonction logarithmique lorsque z est imaginaire. Nous en avons déjà donné une définition (Cours de 1ère année p. 102) qui ne la définit qu'à une constante près égale à $2K\pi i$. —

Nous retrouvons cette même indétermination au moyen de cette nouvelle définition. En effet, pour calculer $\int_1^z \frac{dz}{z}$, je dois intégrer la fonction $\frac{1}{z}$ entre le point A, d'abscisse 1, et le point B qui représente l'imaginaire z. —

Mais cette intégration peut se faire suivant une série de chemins, en tournant une ou plusieurs fois autour de l'origine qui est le seul point critique de la fonction.

A chacun de ces chemins correspond une nouvelle valeur de LZ qui est égale à celle relative au chemin AMB augmentée ou diminuée d'autant de fois $2\pi i R$ que l'on a tourné de fois autour de ce point critique dans le sens direct ou dans le sens inverse; R représentant le résidu de la fonction $\frac{1}{Z}$ par rapport à l'origine, lequel est évidemment égal à l'unité. – On retrouve donc bien le résultat annoncé. –

Remarque. – Nous avons admis que si on intègre suivant un contour tournant plusieurs fois autour d'un point critique, l'intégrale se trouve augmentée d'autant de fois $2\pi i R$ que l'on tourne de fois autour du point. Cela tient à ce que cette intégration est équivalente à autant d'intégrations suivant des contours tournant une fois autour de l'origine.

Nous pouvons faire une constatation analogue pour la fonction arc tg Z que nous avons définie (Cours de 1ère année page 115) et seulement à un multiple de π près. –

Il en sera encore de même si nous prenons comme définition de cette fonction l'intégrale.

$$\int_0^Z \frac{dZ}{1+Z^2} = \operatorname{arctg} Z$$

La fonction $\frac{1}{1+Z^2}$ admet les deux points critiques $\pm i$ figurés en A et A'; d'ailleurs, comme elle peut se mettre sous la forme :

$$-\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{Z+i} - \frac{1}{Z-i}\right)$$

ses résidus par rapport à ces deux points sont $\pm\frac{1}{2i}$ et par suite la fonction n'est définie qu'à un multiple près de $2\pi i \times \frac{1}{2i}$, c'est-à-dire à un multiple près de π. –

Application. – Soit un polynome entier en z $\varphi(z)$.

Je considère la dérivée logarithmique $\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ et je puis lui appliquer le théorème général car c'est une fonction monodrome. – L'intégrale $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ prise le long d'un contour fermé est égale à $2\pi i \sum R$. Les points critiques de la fonction intégrée correspondent évidemment aux racines de $\varphi(z)$. – soient $a\, b\, c \ldots l$, ces racines, et $\alpha, \beta \ldots \lambda$ leurs degrés de multiplicités respectifs. On aura alors:

$$\varphi(z) = A(z-a)^{\alpha}(z-b)^{\beta} \cdots (z-l)^{\lambda}$$

Mais $$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\alpha}{z-a} + \frac{\beta}{z-b} + \cdots + \frac{\lambda}{z-l}$$

Il résulte immédiatement de cette expression de la fonction à intégrer que ses résidus par rapport aux points correspondant aux racines sont respectivement $\alpha, \beta \ldots \lambda$

Donc l'intégrale $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ prise le long d'un contour fermé sera égale à $2\pi i$ que multiplie la somme des nombres représentant les ordres de multiplicité des différentes racines comprises à l'intérieur du contour, ou encore elle est égale à autant de fois $2\pi i$ qu'il y a de racines de $\varphi(z)$ contenues à l'intérieur du contour, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité.

Ce théorème permet de calculer le nombre de ces racines; il suffit pour cela de calculer l'intégrale le long du contour fermé considéré; mais l'intégrale indéfinie $\int \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} dz$ est égale à $L\,\varphi(z)$; c'est une fonction mal déterminée, mais ses variations sont bien déterminées, et nous obtiendrons le nombre des racines en divisant son accroissement (qui pour un contour fermé est toujours un multiple de $2\pi i$) par $2\pi i$.

On pourra calculer cet accroissement de $L\,\varphi(z)$ ainsi qu'il suit:

Soit $\varphi(z) = P + Qi$

$$L\,\varphi(z) = L\,(P+Qi) = \frac{1}{2} L\,(P^2+Q^2) + i \operatorname{arctg} \frac{Q}{P}$$

L'accroissement de $\frac{1}{2} L (P^2 + Q^2)$ le long d'un contour fermé quelconque est toujours nul car c'est par définition un logarithme réel; quant à $\text{arctg}\frac{Q}{P}$ il n'est défini qu'à un multiple de 2π près (car l'arc tg qui figure dans un logarithme est défini par son sinus et par son cosinus)

Pour évaluer la variation de $\text{arc tg}\frac{Q}{P}$ le long du contour nous chercherons tous les points du contour pour lesquels $\frac{Q}{P}$ devient infini c'est-à-dire pour lesquels P s'annule; nous diviserons ainsi le contour en une série d'arcs aux deux extrémités desquels $\frac{Q}{P}$ est égal $\pm\infty$

Quatre cas sont alors à considérer

1° la fonction est égale à $+\infty$ aux deux extrémités de l'arc

2° la fonction est égale à $-\infty$ aux deux extrémités

3° la fonction est égale à $+\infty$ à l'origine et à $-\infty$ à l'extrémité.

4° la fonction est égale à $-\infty$ à l'origine et à $+\infty$ à l'extrémité –

Dans les deux premiers cas l'intégrale le long de l'arc considéré est nulle (car la tangente passant de $+\infty$ à $+\infty$ par exemple sans devenir infinie l'extrémité de l'arc reste toujours sur la moitié droite du cercle trigonométrique, son accroissement est donc nul) – Dans le troisième cas l'intégrale le long du segment est égal à $-\pi$ dans le quatrième cas à $+\pi$; donc l'intégrale totale prise le long du contour tout entier sera égale à $n\pi i$, n étant l'excès du nombre des arcs répondant au quatrième cas, sur celui des arcs répondant au troisième, et $\frac{n}{2}$ sera le nombre total des racines de la fonction comprises à l'intérieur du contour; $\frac{n}{2}$ devant être entier on voit que n est nécessairement un nombre pair

Application. – Considérons l'équation

$$z^2 - 4z + 1 = 0$$

et cherchons le nombre des racines comprises à l'intérieur du cercle de centre 0 et de rayon 1.

On obtiendra tous les points du cercle en posant $z = \cos\varphi + i \sin\varphi$ et faisant varier φ de 0 à 2π

Substituant dans l'équation proposée il vient

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi - 4 (\cos\varphi + i \sin\varphi) + 1 = 0$$

On a donc en adoptant les notations précédentes

$$P = \cos^2\varphi - 4 \cos\varphi + 1 = 2\cos\varphi (\cos\varphi - 2)$$

$$Q = \sin 2\varphi - 4 \sin\varphi = 2 \sin\varphi (\cos\varphi - 2)$$

D'où $tg \frac{Q}{P} = tg\,\varphi$

et $arc\,tg \frac{Q}{P} = \varphi$

Or lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens trigonométrique φ augmente de 2π ; donc l'intégrale prise le long du cercle est égale à $2\pi i$ et il y a une racine de l'équation contenue à l'intérieur du cercle, ce que l'on vérifie directement.

Nombre des racines d'un polynôme entier en z.

On peut encore se servir des résultats que nous venons d'établir pour trouver le nombre total des racines de l'équation.

$$\varphi(z) = A_0 z^m + A_1 z^{m-1} \text{---------} A_{m-1} z + A_m = 0$$

Il suffit pour cela d'intégrer le long d'un cercle de rayon aussi grand que l'on veut.

Posons donc $z = R(\cos\varphi + i \sin\varphi)$

substituant dans $\varphi(z)$ il vient

$$P = A_0 R^m \cos m\varphi + A_1 R^{m-1} \cos(m-1)\varphi \text{----------} + A_{m-1} R \cos\varphi + A_m.$$

$$Q = A_0 R^m \sin m\varphi + A_1 R^{m-1} \sin(m-1)\varphi \text{---------} + A_{m-1} R \sin\varphi$$

Pour une valeur de R suffisamment grande $\frac{Q}{P}$ diffère aussi peu que l'on veut de $tg(m\varphi)$, par suite

arc. tg $\frac{Q}{P}$ diffère aussi peu que l'on veut de $m\varphi$, son accroissement le long du contour diffère alors aussi peu que l'on veut de $2m\pi i$, mais comme il doit être égal à un multiple de $2\pi i$, il est rigoureusement égal à $2m\pi i$, pourvu que l'on prenne R suffisamment grand, et alors il y a m racines de l'équation $\varphi(z)$ à l'intérieur d'un cercle de rayon R, R étant seulement assujetti à être assez grand, il y a donc en tout m racines.

Applications au calcul des intégrales définies.

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}}$

Soit à calculer l'intégrale

$$u=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}}$$

m et n étant deux entiers positifs et m étant inférieur à n. Cette intégrale est prise pour des valeurs réelles de la variable, c'est-à-dire qu'elle doit être prise le long de l'axe des x de $-\infty$ à $+\infty$. Pour la calculer je considère le contour fermé formé par cet axe et un demi-cercle de rayon infiniment grand décrit de l'origine comme centre et situé au dessus de l'axe des x

L'intégrale $\int\frac{z^{2m}dz}{1+z^{2n}}$, prise le long de ce contour dans le sens de la flèche se compose de l'intégrale cherchée u et de l'intégrale.

$$\int_0^{\pi}\frac{R^{2m}(\cos 2m\varphi+i\sin 2m\varphi)}{1+R^{2n}(\cos 2n\varphi+i\sin 2n\varphi)}R(-\sin\varphi+i\cos\varphi)\,d\varphi$$

qui est relative au demi-cercle.

Nous ferons d'ailleurs augmenter indéfiniment R dans ces conditions la différentielle à intégrer tendra vers 0, c'est-à-dire que lorsque R est infini l'intégrale est nulle puisqu'elle est faite entre deux limites déterminées, et l'intégrale prise le long du contour se réduit à u ; mais d'autre part la fonction

à intégrer étant monodrôme cette intégrale est égale à $2\pi i$ que multiplie la somme des résidus de la fonction par rapport aux points critiques situés à l'intérieur du contour; or ceux-ci correspondent à celles des racines de l'équation

$$Z^{2n} + 1 = 0$$

qui ont leur partie imaginaire positive soit $\alpha + \beta i$ l'une d'elles; pour avoir le résidu de la fonction par rapport à cette racine, je la décompose en éléments simples sous la forme

$$\frac{Z^{2m}}{1 + Z^{2n}} = \sum \frac{A + Bi}{z - (\alpha + \beta i)}$$

Le résidu par rapport au point correspondant à $\alpha + \beta i$ est évidemment $A + Bi$; on a donc

$$u = 2\pi i \sum A + Bi$$

la somme étant étendue à une moitié seulement des racines; or il résulte des calculs faits précédemment (Cours de 2e année pages 29 et suivantes) pour trouver cette même intégrale que $\sum A$ étendue à toutes les racines est nulle, il en est de même de la somme étendue à la moitié considérée en raison des propriétés des imaginaires conjuguées; quant à $\sum B$ c'est elle même que nous avons calculée, elle est égale à

$$\frac{-1}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

il vient donc

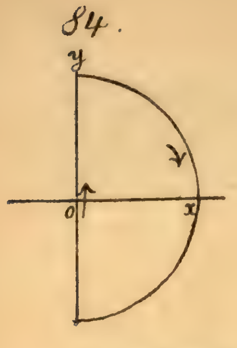
$$u = \frac{2\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z^{2m}\,dZ}{1 + Z^{2n}} = \frac{2\pi}{\sin\left(\frac{2m+1}{2n}\pi\right)}$$

$\int \frac{e^{-mz}dz}{a-z}$ Soit encore l'intégrale $\int \frac{e^{-mz}}{a-z}\,dz$

Je calcule cette intégrale le long de l'axe oy c-à-d



que je pose $z = \beta i$ et que je fais varier β de $-\infty$ à $+\infty$; soit V la valeur de cette intégrale ; je complète un contour fermé au moyen d'un demi-cercle de centre 0, de rayon infiniment grand et situé à droite de Oy. L'intégrale prise le long de ce contour dans le sens de la flèche se compose de l'intégrale V et de l'intégrale

$$\int_{+\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-mR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{a - R(\cos\varphi + i\sin\varphi)} (-\sin\varphi + i\cos\varphi)\, d\varphi$$

or cette dernière intégrale est nulle, car la différentielle contient en facteur e^{-mR} qui multiplié par n'importe quel polynôme algébrique en R tend vers 0 lorsque R augmente indéfiniment pourvu que m soit positif ainsi que $\cos\varphi$ ce qui a lieu ici.

L'intégrale le long du contour se réduit donc à V, elle est d'ailleurs égale à $-2\pi i \sum R$ (on met le signe $-$ car l'intégration le long du contour est faite ici en sens inverse du sens trigonométrique) ; mais il n'y a qu'un point critique, le point $z = a$; le résidu de la fonction par rapport à ce point est $-e^{-ma}$

On a donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} i \frac{e^{-m\beta i}\, d\beta}{a - \beta i} = 2\pi i e^{-ma}$$

ou

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\beta i}(a + \beta i)\, d\beta}{a^2 + \beta^2} = 2\pi e^{-ma}$$

Égalant les parties réelles des deux membres il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a\cos(m\beta)\, d\beta}{a^2 + \beta^2} + \int_{+\infty}^{+\infty} \frac{\beta \sin(m\beta)\, d\beta}{a^2 + \beta^2} = 2\pi e^{-ma} \quad (1)$$

Si l'on calcule le long du même contour l'intégrale

$$\int \frac{e^{-mz}}{z+a}\, dz$$

Il vient en remarquant qu'il n'y a pas de points critiques à l'intérieur du contour

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos(m\beta)\, d\beta}{a^2+\beta^2} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta \sin(m\beta)\, d\beta}{a^2+\beta^2} = 0 \qquad (2)$$

Des équations (1) et (2) on déduit

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{a \cos(m\beta)\, d\beta}{a^2+\beta^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta \sin m\beta\, d\beta}{a^2+\beta^2} = \pi e^{-ma}$$

D'ailleurs on peut déduire l'une de ces deux formules de l'autre en dérivant sous le signe $\int$ par rapport à m.

9e Leçon.

Applications du Théorème de Cauchy.

Calcul du résidu. Lorsque l'on veut appliquer le théorème de Cauchy pour le calcul d'une intégrale le long d'un contour fermé, on est généralement obligé de calculer le résidu de la fonction à intégrer par rapport à un ou plusieurs points critiques. Dans bien des cas la méthode générale du développement en série qui a été indiquée peut être simplifiée ainsi qu'il suit : soit la fonction $F(z)$ qui devient infinie pour $z=\gamma$; très souvent il suffit de la multiplier par $(z-\gamma)$ pour que le produit ne devienne plus infini. C'est par exemple le cas où $F(z)$ est l'inverse d'une fonction entière dont $z=\gamma$ est une racine simple ; dans ce cas particulier le résidu est simplement égal à la limite du produit $F(z)(z-\gamma)$;

en effet pour appliquer la théorie générale je poserai $F(z)(z-\gamma)=\varphi(z)$; je développerai $\varphi(z)$ en série de puissances par rapport à $(z-\gamma)$. soit :

$$\varphi(z) = A_1 + A_2(z-\gamma) + \cdots + A_n(z-\gamma)^n \quad (1)$$

D'où $$F(z) = \frac{A_1}{z-\gamma} + A_2 + A_3(z-\gamma) \cdots + A_4(z-\gamma)^{n-1} \quad (2)$$

D'après la théorie générale le résidu cherché est A_1, mais si l'on se reporte à la formule (1) on voit bien que A_1 est la limite vers laquelle tend $\varphi(z)$ c'est-à-dire $(z-\gamma)F(z)$ quand z tend vers γ.

C. q. F. D.

$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m\beta \, d\beta}{a^2+\beta^2}$ Dans la dernière leçon nous avions calculé l'intégrale définie

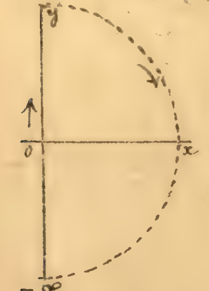
$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m\beta \, d\beta}{a^2+\beta^2}$$

par l'addition des 2 intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\beta i} d\beta}{a-\beta i} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\beta i} d\beta}{a+\beta i}$$

obtenues par l'intégration des deux fonctions $\frac{e^{-mz}}{a-z}$ et $\frac{e^{-mz}}{a+z}$ le long d'un certain contour fermé. On peut obtenir directement l'intégrale u, en intégrant le long de ce même contour la somme $\frac{e^{-mz}}{a^2-z^2}$ de ces deux fonctions (cette somme étant débarrassée du facteur constant $2a$)

En effet je calcule l'intégrale



$$\int \frac{e^{-mz} dz}{a^2-z^2}$$

le long du contour fermé constitué par l'axe des y depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ et d'un demi-cercle de rayon infiniment grand ayant pour centre l'origine et situé à droite de oy.

Cette intégrale se compose d'abord de l'intégrale le long de oy.

$$V = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\beta i}}{a^2+\beta^2}\, i\, d\beta$$

puis de l'intégrale

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-mR(\cos\varphi + i\sin\varphi)}}{a^2+R^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)} (-\cos\varphi + i\sin\varphi)\, d\varphi$$

Tous les éléments de cette dernière intégrale seront nuls lorsque R sera infiniment grand si nous supposons m positifs à cause du facteur e^{-mR} qui décroit indéfiniment et plus vite que tout facteur algébrique.

L'intégrale le long du contour se réduit donc à V et la fonction n'admet à l'intérieur du contour qu'un seul point critique $z = a$, son résidu par rapport à celui-ci se calcule au moyen de la remarque précédente, il est égal à $-\frac{e^{-ma}}{2a}$; l'intégrale V est alors égale à $-2\pi i$ que multiplié ce résidu (on change le signe car l'intégration le long du contour a été faite en sens inverse du sens trigonométrique). On a donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-m\beta i}}{a^2+\beta^2}\, i\, d\beta = 2\pi i\, \frac{e^{-ma}}{2a}$$

en séparant les parties réelles et imaginaires, il vient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m\beta}{a^2+\beta^2}\, d\beta = \frac{\pi e^{-ma}}{a}$$

C'est le résultat trouvé précédemment.

Méthode de Poisson. Cette intégrale célèbre a été trouvée pour la première fois par Poisson qui en donnait la démonstration suivante qui ne saurait être acceptée.

Soit

$$u = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos m\beta\, d\beta}{a^2+\beta^2}$$

dérivant 2 fois par rapport à m il vient successivement :

$$\frac{du}{dm} = -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\beta \sin m\beta}{a^2+\beta^2}\, d\beta.$$

$$\frac{d^2u}{dm^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{-\beta^2 \cos m\beta}{\beta^2+a^2}\, d\beta.$$

On peut donc écrire :

$$\frac{d^2u}{dm^2} - a^2 u = -\int_{-\infty}^{+\infty} \cos m\beta\, d\beta \quad (1)$$

Or Poisson admet que $\int_{-\infty}^{+\infty} \cos m\beta\, d\beta = 0$

Il fait pour l'établir le raisonnement suivant :

On a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a\beta} \cos m\beta\, d\beta = \frac{a}{a^2+m^2}$ (2)

faisant $a=0$, il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos m\beta\, d\beta = 0$$

Cela n'est pas exact car la formule (1) n'est applicable que si a est $\neq 0$; d'ailleurs cette dernière intégrale n'est pas nulle ; elle est indéterminée car elle représente l'aire d'une courbe composée d'une suite de boucles égales alternativement au dessus et au dessous de l'axe des x.

Poisson concluait donc de l'équation (1) que l'on a

$$\frac{d^2u}{dm^2} = a^2 u$$

Intégrant cette équation différentielle il vient :

$$u = Ae^{-ma} + Be^{ma}$$

Le coefficient B doit être nul car si on fait augmenter indéfiniment m, $\cos m\beta$ reste toujours fini et par suite l'intégrale reste aussi finie.

Quant au Coefficient A pour le déterminer je fais $m=0$ il vient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\beta}{a^2+\beta^2} = A$$

$$\int \frac{d\beta}{a^2+\beta^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{a}$$

On a donc $A = \frac{\pi}{a}$ Donc finalement $u = \frac{\pi}{a} e^{-ma}$

Poisson arrive ainsi à un résultat exact ; mais l'équation différentielle (1) qu'il a obtenue n'est pas exacte parce qu'il n'avait pas le droit de différentier sous le signe $\int$ et la faute qu'il commet en annulant le second membre corrige précisément l'équation (1)

$\int \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$ — Nous sommes arrivés précédemment au résultat

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

en supposant a compris entre 0 et 1. On peut le retrouver au moyen du théorème de Cauchy ; mais ce théorème ne peut pas être immédiatement appliqué à la fonction

$$\int \frac{z^{a-1}dz}{1+z}$$

car si a n'est pas entier elle est mal déterminée.
On peut cependant appliquer le théorème de Cauchy grâce à l'artifice suivant :
L'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{a-1}dx}{1+x}$$ relative à des éléments réels est égale à l'intégrale

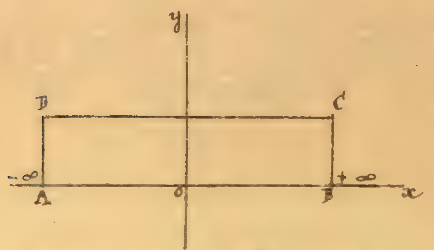
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{at}dt}{1+e^t}$$ déduite de la précédente par le changement de variables $z = e^t$

Mais la fonction $\int \frac{e^{az}dz}{1+e^z}$

que nous sommes ramenés à intégrer le long de l'axe des x est bien déterminée et nous pouvons lui appliquer le théorème de Cauchy.

A cet effet j'intègre le long du contour constitué

par l'axe des x depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$ (soit AB) par une parallèle BC à Oy infiniment éloignée, par la parallèle à Ox située à une distance $2\pi i$ prise en sens inverse, soit CD enfin par une nouvelle parallèle à Oy soit DA. L'intégrale le long de ce contour fermé est égale à la somme des intégrales le long des 4 côtés. Le long de AB c'est précisément l'intégrale cherchée X; le long de BC l'intégrale est nulle : en effet le long de cette droite x est égal à $\alpha + yi$, α est fixe mais infiniment grand et y varie de 0 à 2π. On a donc



$$\int_{BC} = \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(\alpha+yi)}\, i\, dy}{1+e^{(\alpha+yi)}}.$$

Mais tous les éléments de cette intégrale sont nuls car lorsque α augmente indéfiniment le dénominateur croît beaucoup plus vite que le numérateur puisque a est plus petit que l'unité ; tous les éléments de cette intégrale prise entre les limites finies 0 et 2π étant nuls, l'intégrale l'est aussi.

L'intégrale $\int_{DA}$ est aussi nulle ; en effet elle est égale à $\int_0^{2\pi} \frac{e^{a(-\alpha+yi)}\, i\, dy}{1+e^{-\alpha+yi}}$

Lorsque α augmente indéfiniment $e^{-\alpha}$ et par suite $e^{-a\alpha}$ tend vers 0. Comme cette dernière expression est en facteur au dénominateur tous les éléments de l'intégrale sont nuls.

Il ne reste donc plus que l'intégrale le long de CD ; le long de cette droite z est représenté par $x + 2\pi i$, x variant de $-\infty$ à $+\infty$. On a donc :

$$\int_{CD} = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{e^{a(x+2\pi i)}dx}{1+e^{x+2\pi i}} = -e^{2a\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax}dx}{1+e^{x}} = -e^{2a\pi i} X$$

Donc l'intégrale prise le long du contour fermé considéré est égale à $X\left(1-e^{2a\pi i}\right)$

Pour la calculer d'autre part je remarque que la fonction ne présente qu'un point critique à l'intérieur du contour. C'est le point $z = \pi i$

En effet les racines de l'équation $e^z + 1 = 0$ sont comprises dans la formule

$$z = (2K+1)\pi i$$

La fraction $\dfrac{e^{az}}{1+e^z}$ devient donc infinie pour $z = \pi i$ multipliant par $z - \pi i$ le produit reste fini et a pour limite $-e^{a\pi i}$. En effet ce produit est

$$e^{az}\left(\frac{z-\pi i}{1+e^z}\right)$$

Appliquant au 2e facteur la règle de l'Hôpital il vient pour sa limite -1. et par suite pour celle du produit $R = -e^{a\pi i}$ Tel est le résidu de la fonction à intégrer par rapport au point critique. On a donc.

$$X\left(1 - e^{2a\pi i}\right) = -2\pi i e^{a\pi i} \quad \text{ou}$$

$$X\left(1 - \cos 2a\pi - i \sin 2a\pi\right) = -2\pi i (\cos a\pi + i \sin a\pi)$$

Séparant les parties réelles et imaginaires il vient pour déterminer X les équations identiques

$$X = \frac{2\pi \sin a\pi}{1 - \cos 2a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

$$X = \frac{2\pi \cos a\pi}{\sin 2a\pi} = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Justification des calculs d'Euler. Le théorème de Cauchy permet de justifier deux calculs qui avaient été faits par Euler en employant des imaginaires. (et que nous avons indiqués précédemment dans le cours de 2e année page 20)

De la formule :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Euler déduit en remplaçant x par $y+\beta i$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} e^{\beta^2} (\cos 2\beta y + i \sin 2\beta y)\, dy = \sqrt{\pi}$$

et par suite

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \cos 2\beta y \, dy = e^{-\beta^2} \sqrt{\pi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} \sin 2\beta y \, dy = 0$$

Ces calculs ont besoin d'être justifiés. En effet nous remplaçons l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ le long de Ox par l'intégration de $-\infty$ à $+\infty$ le long d'une parallèle à Ox à une distance β, c-à-d le long de la droite $z = x + \beta i$ et nous admettons que les intégrales prises le long de ces deux droites sont égales. Pour le montrer je réunis ces deux droites par deux parallèles à Oy AB et CD infiniment éloignées; je forme ainsi un contour fermé ABCD, je remarque immédiatement que l'intégrale le long de ce contour est nulle car la fonction intégrée n'a pas de point critique à distance finie. Or cette intégrale se compose de la somme des intégrales prises le long de chacun des côtés; les intégrales prises le long de AB et CD sont nulles; en effet le long de AB on a $z = \alpha + yi$ α étant fixe et infiniment grand et y variant de 0 à π.

On a donc

$$\int_{AB} = \int_0^{\pi} e^{-(\alpha+yi)^2} i\, dy$$

et tous les éléments de cette intégrale sont nuls; lorsque α est infiniment grand, cette intégrale est donc nulle.

Il en est de même de l'intégrale le long de CD pour la même raison. On a donc finalement:

$$\int_{DA} + \int_{BC} = 0$$

$$\int_{DA} = \int_{CB}$$

Ce qui justifie le calcul d'Euler.

De même si dans l'intégrale

$$\int_0^\infty e^{-\alpha^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, \alpha$$

On pose $\alpha = a + bi$, il vient

$$\int_0^\infty e^{-(a+bi)^2 x^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}\, (a+bi) \qquad (1)$$

La formule obtenue ainsi et celle que l'on pourra en déduire pourraient être inexactes. En effet, remplacer αx par $(a+bi)x$, c'est faire tourner la droite le long de laquelle on intègre, d'un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$, c'est-à-dire remplacer l'intégrale le long de OX par l'intégrale le long de OZ. Pour le justifier, je forme un contour fermé au moyen d'un arc de cercle de centre O et de rayon infiniment grand. L'intégrale le long du contour OXZ est nulle car la fonction n'a pas de point critique à distance finie. Or le long de XZ, l'intégrale est nulle; en effet on a :

$$\int_{XZ} = \int_0^{\operatorname{arctg} \frac{b}{a}} e^{-R^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)} dR\,(-\sin\varphi + i\cos\varphi)$$

Tous les éléments de cette intégrale sont nuls à cause du facteur e^{-R^2} qui s'annule lorsque R est infiniment grand, pourvu que le facteur $\cos 2\varphi$ soit toujours positif ce qui exige $\varphi < \frac{\pi}{4}$ dans les limites de l'intégration c'est-à-dire $b < a$.

Alors l'intégrale le long du contour fermé se réduit à

$$\int_{OX} + \int_{ZO} = 0.$$

d'où $\int_{OX} = \int_{OZ}$

Ce qui justifie la formule (1); on déduit immédiatement de celle-ci, faisant $a = b$ et en séparant les parties réelles et imaginaires.

$$\int_0^\infty (\cos 2a^2 y^2)\,dy + i\int_0^\infty (\sin 2a^2 y^2)\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{a(1+i)}$$

d'où

$$\int_0^\infty \cos 2a^2 y^2\,dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^\infty \sin 2a^2 y^2\,dy = -\frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

Euler avait établi de même par l'introduction des imaginaires une formule célèbre ; on a par définition :

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}\,dx = \Gamma(n)$$

ou en posant $x = (a+bi)\,y$

$$\int_0^\infty e^{-(a+bi)y}\, y^{n-1}\,dy = \frac{\Gamma(n)}{(a+bi)^n} \qquad (1)$$

ou posant : $t = \operatorname{arctg}\frac{b}{a}$

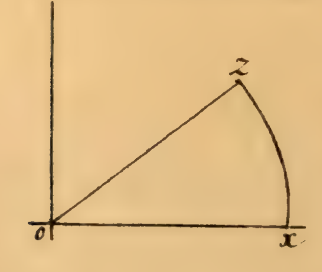
$$\int_0^\infty e^{-ay}(\cos by - i\sin by)\, y^{n-1}\,dy = \frac{\Gamma(n)}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}(\cos nt + i\sin nt)}$$

et en séparant les parties réelles et imaginaires

$$\int_0^\infty e^{-ay} y^{n-1}\cos by\,dy = \frac{\Gamma(n)\cos nt}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad (2)$$

$$\int_0^\infty e^{-ay} y^{n-1}\sin by\,dy = \frac{\Gamma(n)\sin nt}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{2}}} \qquad (3)$$

La formule (1) d'où nous avons déduit les deux dernières doit être justifiée.



Comme précédemment nous avons remplacé l'intégration le long de ox par l'intégration le long d'une droite oz faisant avec la précédente un angle dont la tangente est $\frac{b}{a}$; cette substitution se justifie de même ; car si je forme un contour fermé au moyen de l'arc de cercle zx

de rayon infiniment grand, l'intégrale le long du contour est nulle, la fonction n'ayant aucun point critique à l'intérieur du contour; de plus, l'intégrale le long de l'arc xz est nulle; en effet elle est égale

$$\int_0^{\operatorname{arctg}\frac{b}{a}} e^{-R(\cos\varphi+i\sin\varphi)} R^n\left[\cos(n-1)\varphi+i\sin(n-1)\varphi\right](-\sin\varphi+i\cos\varphi)\,d\varphi$$

pour toutes les valeurs de φ inférieures à $\frac{\pi}{2}$, l'exposant de e sera négatif et infiniment grand en valeur absolue; il l'emportera toujours sur le facteur infiniment grand R^n ; tous les éléments de l'intégrale seront donc nuls et par suite celle-ci le sera aussi.

On a donc bien

$$\int_{0x}=\int_{0z}$$

à la condition que la limite supérieure de φ, $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, soit inférieure à $\frac{\pi}{2}$ c'est-à-dire que a et b soient de même signe.

Il faut bien observer que l'application que nous avons faite du théorème de Cauchy suppose la fonction à intégrer bien déterminée c'est-à-dire suppose n entier. Ce n'est que dans cette hypothèse que nous pouvons considérer les formules (2) et (3) comme démontrées.

10e Leçon.

Détermination d'une fonction d'une variable imaginaire par ses valeurs le long d'un contour. — Développement en série.

Les fonctions d'une variable imaginaire que nous

étudions ne présentent pas toute la généralité que l'on pourrait croire ; c'est ainsi qu'on peut pour une fonction d'une variable réelle se donner d'une manière absolument arbitraire une série aussi nombreuse que l'on veut de valeurs de la fonction pour diverses valeurs de la variable ; pour une fonction d'une variable imaginaire $P+Qi$ il n'en est pas de même ; les deux fonctions P et Q sont assujetties à satisfaire aux 2 conditions

$$\frac{dP}{dx}=\frac{dQ}{dy}$$

$$\frac{dP}{dy}=-\frac{dQ}{dx}$$

de ces deux conditions on déduit les deux suivantes qui concernent chacune une seule des fonctions :

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}=0$$

$$\frac{d^2Q}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dy^2}=0$$

Chacune des fonctions P et Q, satisfait donc à une équation différentielle du 2e ordre, comme par exemple la coordonnée z d'une surface développable considérée comme fonction de x et de y. Mais il y a une différence essentielle entre les 2 cas : une surface développable n'est pas déterminée lorsqu'on donne une courbe de la surface (c'est-à-dire lorsqu'on donne les valeurs de z relatives à tous les points d'une courbe tracée dans le plan des $x\,y$) ; au contraire si l'on donne les valeurs de la fonction P le long d'un contour fermé tracé dans le plan, la fonction P se trouve déterminée pour tout point, et par suite aussi la fonction Q puisque P étant connu les dérivées partielles de Q le sont immédiatement.

Nous allons démontrer cette proposition.

Théorème. - Si l'on donne les valeurs de la fonction P pour tous les points d'un contour fermé C, celle-ci ne peut avoir qu'une seule valeur pour tout point

intérieur à ce contour, si l'on suppose que P soit une fonction monodrôme.

En effet soit P=V une solution du problème ; c'est donc que nous supposons que V est une fonction monodrôme satisfaisant à la condition nécessaire :

$$\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}=0$$

et prenant pour tout point du contour C les valeurs données.

Je suppose qu'il existe une autre solution satisfaisant aux mêmes conditions ; je pourrai toujours la mettre sous la forme

$$P=V+u$$

u étant une fonction monodrome satisfaisant à la Condition

$$\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}=0 \qquad (1)$$

et enfin s'annulant pour tout point du contour considéré C. Je dis que la fonction u satisfaisant à cette condition est identiquement nulle. En effet je considère l'intégrale double

$$A=\iint u\left(\frac{d^2u}{dx^2}+\frac{d^2u}{dy^2}\right)dx\,dy$$

et je l'étends à tous les éléments intérieurs au contour C ; elle est évidemment nulle en vertu de l'équation (1) ; mais elle s'écrit :

$$A=\iint u\frac{d^2u}{dx^2}\,dx\,dy+\iint u\frac{d^2u}{dy^2}\,dx\,dy=\int dy\int u\frac{d^2u}{dx^2}dx+\int dx\int u\frac{d^2u}{dy^2}dy$$

Chacune des deux premières intégrations peut se faire par parties ; on a

$$\int u\frac{d^2u}{dx^2}dx=u\frac{du}{dx}\int\left(\frac{du}{dx}\right)^2dx$$

Si l'on introduit les limites, le terme tout intégré disparaît car les limites correspondent toutes deux à un point du contour C pour lequel u est seul par hypothèse.

Transformant de même la 2e intégrale on a :

$$A = -\iint \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx\,dy - \iint \left(\frac{du}{dy}\right)^2 dx\,dy$$

chacune de ces deux intégrales est nécessairement positive puisque tous les éléments en sont des carrés. Donc leur somme changée de signe A est négative, à moins que tous les éléments des deux intégrales ne soient nuls ce qui exige que l'on ait simultanément pour tout point intérieur du contour

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dx} = 0 \\ \dfrac{du}{dy} = 0 \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire } u = \text{constante}$$

mais u étant nulle pour tout point du contour, il faut donc que u soit nulle pour tout point intérieur au contour.

La solution $P = V$ est donc unique

C.Q.F.D.

Nous venons ainsi de démontrer qu'il ne peut y avoir qu'une solution du problème proposé ; le théorème suivant permet d'établir qu'il en existe bien une.

Théorème. - Si la fonction P déterminée ainsi qu'il vient d'être dit existe, elle est de toutes les fonctions possibles et prenant les valeurs données le long du contour C celle qui rend l'intégrale double

$$\iint \left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right] dx\,dy \quad \text{étendue à tous les éléments}$$

intérieurs au contour, la plus petite possible.

En effet j'obtiendrai toutes les fonctions possibles répondant à la question en ajoutant à l'une d'entre elles P une fonction u quelconque mais s'annulant pour tout point du contour. L'intégrale donnée devient alors :

$$A = \iint \left[\left(\frac{dP}{dx} + \frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dP}{dy} + \frac{du}{dy}\right)^2\right] dx\,dy$$

$$=\iint\left[\left(\frac{dP}{dx}\right)^2+\left(\frac{dP}{dy}\right)^2\right]dx\,dy+2\iint\left(\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{du}{dy}\right)dx\,dy$$
$$+\iint\left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]dx\,dy$$

Donc lorsqu'on remplace P par P+u l'intégrale A se trouve augmentée des deux dernières intégrales de la dernière formule. Or cet accroissement est toujours positif; en effet il se compose d'un terme positif

$$\iint\left[\left(\frac{du}{dz}\right)^2+\left(\frac{du}{dy}\right)^2\right]dx\,dy$$

et d'un terme

$$\delta=2\iint\left[\left(\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}+\frac{dP}{dy}\cdot\frac{du}{dy}\right)\right]dx\,dy$$

qui est nul si l'on a

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2Q}{dx^2}=0$$

pour tout point intérieur au contour; en effet on a:

$$\frac{\delta}{2}=\int dy\int\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\,dx+\int dx\int\frac{dP}{dy}\cdot\frac{du}{dy}\,dy$$

et en intégrant par parties, il vient:

$$\int\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\,dx=u\frac{dP}{dx}-\int u\frac{d^2P}{dx^2}\,dx$$

mais en substituant les limites le terme tout intégré disparaît car ces deux limites correspondent à deux points du contour pour lesquels u est nul par hypothèse; si donc les intégrations sont étendues à tous les points intérieurs au contour on a:

$$\int\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\cdot dx=-\int u\frac{d^2P}{dx^2}\,dx \quad \text{d'où} \quad \iint\left(\frac{dP}{dx}\cdot\frac{du}{dx}\right)dx\,dy=\iint u\frac{d^2P}{dx^2}dx\,dy$$

de même

$$\iint \left(\frac{dP}{dy} \cdot \frac{du}{dy}\right) dx\,dy = -\iint u \frac{d^2P}{dy^2}\,dx\,dy$$

et par suite

$$\frac{\delta}{2} = -\iint u \left(\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2}\right) dx\,dy$$

ce qui est évidemment nul.

Donc lorsqu'on remplace P par P+u l'intégrale considérée est nécessairement augmentée d'une quantité positive; c'est donc P qui rend cette intégrale la plus petite possible.

Pour établir complètement l'existence de la fonction P, nous allons établir la réciproque de ce théorème.

Réciproque.-

Si une fonction P prend les valeurs données tout le long du contour et est de toutes les fonctions satisfaisant à cette condition celle qui rend l'intégrale double considérée minimum on a

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} = 0$$

En effet, donnons à P un accroissement quelconque u il en résulte pour l'intégrale un accroissement

$$\delta = 2\iint \left(\frac{dP}{dx}\,\frac{du}{dx} + \frac{dP}{dy}\,\frac{du}{dy}\right) dx\,dy + \iint \left[\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2\right] dx\,dy$$

cet accroissement doit être toujours positif; or, nous pouvons toujours prendre pour la fonction u le produit d'une fonction qui reste finie dans l'intérieur du contour par un infiniment petit ε; dans ces conditions les dérivées $\frac{du}{dx}$ et $\frac{du}{dy}$ contiendront ε en facteur et par suite leurs

carrés seront négligeables devant ces dérivées elles-mêmes et on pourra réduire h au terme

$$2\iint\left[\frac{dP}{dx}\,\frac{du}{dx}+\frac{dP}{dy}\,\frac{du}{dy}\right]dx\,dy$$

mais comme u est toujours supposé s'annuler pour tous les points du contour, ce terme est égal à

$$h'=-2\iint u\left[\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}\right]dx\,dy$$

or, si ce terme n'est pas nul, nous pourrons toujours disposer de la fonction arbitraire u de telle manière qu'elle soit de même signe que $\left(\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}\right)$ pour tout point intérieur au contour; alors le terme précédent est nécessairement négatif et comme c'est le terme principal de l'accroissement h, celui-ci serait négatif, ce qui est contraire à l'hypothèse; il faut donc nécessairement, pour que l'intégrale soit la plus petite possible, que le terme h' soit nul ce qui exige la condition

$$\frac{d^2P}{dx^2}+\frac{d^2P}{dy^2}=0$$

Il résulte donc des 2 théorèmes que nous venons de démontrer que la fonction P existe nécessairement, unique et bien déterminée; c'est de toutes les fonctions prenant sur le contour les valeurs données celle qui donne à l'intégrale double considérée la plus petite valeur.

Il faut bien observer que ce théorème n'a été établi qu'en supposant qu'il ne s'agissait que d'une fonction restant finie et bien déterminée pour tout point intérieur au contour, conditions qui très-fréquemment ne sont pas réalisées.

Exemple.- Considérons par exemple le cas où le contour est un cercle ayant son centre à l'origine et où la fonction doit rester constante pour tout point de ce cercle. Les raisons de symétrie montrent

immédiatement que la fonction P doit garder une même valeur pour tout point d'un même cercle concentrique

On peut donc poser

$$P = \varphi(u) \text{ avec } u = x^2 + y^2$$

Pour exprimer la condition

$$\frac{d^2 P}{d x^2} + \frac{d^2 P}{d y^2} = 0$$

je dérive il vient

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d\varphi}{du}\frac{du}{dx} = 2x\frac{d\varphi}{du}$$

$$\frac{d^2 P}{dx^2} = \frac{2\,d\varphi}{du} + 4x^2\frac{d^2\varphi}{du^2}$$

La condition est donc

$$4\frac{d\varphi}{du} + 4(x^2+y^2)\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$\frac{d\varphi}{du} + u\frac{d^2\varphi}{du^2} = 0. \quad \text{ou encore}$$

$$\frac{\frac{d^2\varphi}{du^2}}{\frac{d\varphi}{du}} + \frac{1}{u} = 0$$

d'où on déduit

$$L\frac{d\varphi}{du} + Lu = C^{te}$$

$$u\frac{d\varphi}{du} = G$$

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{G}{u}$$

et enfin $\varphi(u) = G\,L u + H$

Exprimant que la fonction P a la valeur donnée

pour les points du cercle de rayon R il vient

$$GLR^2 + H = A$$

on a donc

$$P = GL\ \frac{x^2+y^2}{R^2} + A$$

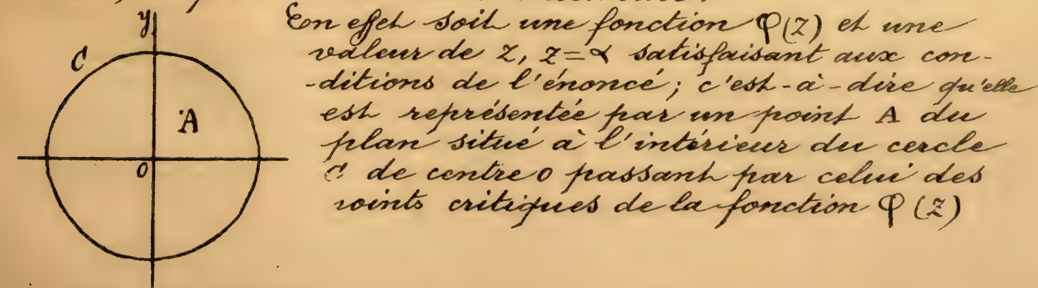
Nous trouvons donc ainsi pour P une valeur indéterminée contenant une constante arbitraire, d'ailleurs la fonction ainsi trouvée ne satisfait pas aux conditions que nous avions supposées puisqu'elle devient infinie pour l'origine.

Développement des fonctions en série.-

Le théorème de Taylor permet de développer une fonction d'une variable réelle x en série de puissances; mais pour chaque série le développement n'est possible qu'entre certaines limites dont la détermination est souvent difficile et qui souvent n'apparaissent pas comme des valeurs remarquables de la fonction.

Les fonctions de variables imaginaires sont développables par la même formule; la connaissance des limites entre lesquelles la variable doit être comprise pour que la série soit acceptable résulte du théorème suivant:

Théorème.- Toute fonction d'une variable imaginaire est développable en série par la formule de Taylor pour toutes les valeurs dont le module est inférieur à celui de la valeur de z de plus petit module pour laquelle la fonction devienne infinie ou mal déterminée, et pour ces valeurs seulement.



En effet soit une fonction $\varphi(z)$ et une valeur de z, $z=\alpha$ satisfaisant aux conditions de l'énoncé; c'est-à-dire qu'elle est représentée par un point A du plan situé à l'intérieur du cercle C de centre O passant par celui des points critiques de la fonction $\varphi(z)$

qui est le plus voisin de 0.

Je considère la fonction $F(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(\alpha)}{z - \alpha}$

La fonction $\varphi(z)$ étant finie et déterminée à l'intérieur du cercle la fonction $F(z)$ l'est nécessairement aussi pour tous ces points sauf peut être le point $z = \alpha$; mais lorsque le point représentatif de z se rapproche de A la fonction $F(z)$ tend vers $\varphi'(\alpha)$ qui, par hypothèse est finie et déterminée. Donc si j'intègre $F(z)$ le long du cercle C, l'intégrale sera nulle, c'est-à-dire que l'on a

$$\int_C F(z)\,dz = 0$$

ou en remplaçant $F(z)$ par sa valeur et séparant l'intégrale en deux parties

$$\int_C \frac{\varphi(\alpha)\,dz}{z-\alpha} = \int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\alpha} \qquad (1)$$

La 1e de ces intégrales est égale d'après le théorème de Cauchy à $2\pi i\,\varphi(\alpha)$ [car $\frac{\varphi(z)}{z-\alpha}$ n'admet évidemment qu'un seul point critique à l'intérieur du contour, le point $z = \alpha$ et son résidu par rapport à celui-ci est $\varphi(\alpha)$]

Pour transformer la 2e je remarque que si le module de $\frac{\alpha}{z}$ est inférieur à l'unité, ce qui est ici toujours réalisé, on a :

$$\frac{1}{z-\alpha} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{\left(1-\frac{\alpha}{z}\right)} = \frac{1}{z}\left(1 + \frac{\alpha}{z} + \frac{\alpha^2}{z^2} + \cdots\cdots + \frac{\alpha^n}{z^n} + \cdots\cdots\right)$$

l'égalité (1) s'écrit donc

$$2\pi i\,\varphi(\alpha) = \int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z} + \alpha\int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2} + \alpha^2\int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z^3} + \cdots + \alpha^n\int_C \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} + \cdots$$

les intégrales du 2e membre sont toutes des constantes, soit $A_0, A_1, \ldots, A_n$ leurs quotients par $2\pi i$; il vient alors

$$\varphi(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^2 + \cdots\cdots + A_n\alpha^n + \cdots\cdots\cdots$$

On démontre que la série précédente n'est autre que la série de Taylor ; le calcul même prouve immédiatement que la série du 2e membre est convergente et représente la fonction toutes les fois que le module de α reste inférieur au rayon du cercle C ; le développement

par la série de Taylor est donc applicable dans ce cas et il ne l'est pas dans tout autre.

En effet le cercle C passe, par hypothèse, par l'un des points critiques; comme la série représente les valeurs de la fonction pour tous les points intérieurs au cercle, si la fonction devient infinie pour un point du cercle, il en est de même pour la série; donc celle-ci est, finie pour tout point intérieur au cercle et elle devient infinie pour un point du cercle, ce cercle est donc nécessairement le cercle de convergence de la série (voir cours de 1re année page 121); celle-ci est donc divergente pour tout point extérieur à ce cercle. Donc la série de Taylor est convergente pour tout point situé à l'intérieur du C et représente alors la fonction et c'est à l'intérieur de ce cercle seulement qu'elle la représente, car elle est divergente à l'extérieur.

Ceci montre immédiatement comment sont déterminées les valeurs réelles entre lesquelles une fonction de variable réelle peut être développée par la série de Taylor: ce sont celles qui ont même module que la valeur critique de plus petit module de la fonction imaginaire correspondante.

Exemple. – Si, par exemple, on veut développer en série

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

pour des valeurs réelles de x, des calculs assez compliqués montrent qu'il faut prendre x en valeur absolue inférieur à 2π; or cette valeur 2π ne présente rien de remarquable pour la fonction considérée, elle s'introduit parce que la fonction

$$\varphi(z) = \frac{z}{e^z - 1}$$

devient infinie pour $z = \pm 2k\pi i$

11e Leçon.

Développement des fonctions en série (suite).

Fonctions mal déterminées.

Nous avons étudié dans la précédente leçon, le développement d'une fonction en série de puissances entières de la forme

$$(1)\quad \varphi(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \cdots + A_n z^n + \cdots$$

On peut aussi chercher à développer la fonction suivant les puissances négatives de z, c'est-à-dire encore suivant les puissances croissantes de $\frac{1}{z}$ sous la forme

$$(2)\quad \varphi(z) = B_0 + \frac{B_1}{z} + \frac{B_2}{z^2} + \cdots + \frac{B_n}{z^n} + \cdots$$

ce développement pourra être fait par la formule de Taylor en prenant $\frac{1}{z}$ comme variable ; il n'est alors possible que pour les valeurs de $\frac{1}{z}$ de module suffisamment petit, c'est-à-dire encore pour les valeurs de z extérieures à un certain cercle.

Développement d'une fonction suivant la somme de deux séries.- Enfin il y a des cas où la fonction $\varphi(z)$ peut être représentée par la somme de deux séries, l'une de puissances positives et l'autre de puissances négatives ; c'est lorsque la fonction reste finie et déterminée à l'intérieur d'une couronne circulaire.

En effet soient C_1, C_2 les 2 cercles qui limitent la couronne : je considère un point α situé dans la couronne et la fonction $F(z)$

$$F(z) = \frac{\varphi(z) - \varphi(\alpha)}{z - \alpha}$$

elle est comme précédemment monodrome et finie dans toute la couronne : donc son intégrale prise

le long du contour que limite la couronne est nulle.

Or, celle-ci se compose de la somme des intégrales prises le long des 2 cercles en sens contraires, ou de la différence de ces 2 intégrales prises dans le même sens.

On a donc

$$\int_{C_1} \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha} = \int_{C_2} \frac{\varphi(z)-\varphi(\alpha)}{z-\alpha}$$

Décomposant chacune des intégrales en deux et remarquant que

$$\int_{C_1} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}dz = +2\pi i\,\varphi(\alpha) \text{ et}$$

$$\int_{C_2} \frac{\varphi(\alpha)}{z-\alpha}dz = 0$$

il reste

$$(1)\quad 2\pi i\,\varphi(\alpha) = \int_{C_1} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}dz - \int_{C_2} \frac{\varphi(z)}{z-\alpha}dz$$

Mais pour tous les points du cercle C_1 (pour lequel mod $\alpha <$ mod. z) on peut remplacer $\frac{1}{z-\alpha}$ par la série

$$\frac{1}{z} + \frac{\alpha}{z^2} + \frac{\alpha^2}{z^3} + \cdots + \frac{\alpha^n}{z^{n+1}}$$

et pour tous les points du cercle C_2 (pour lequel mod $\alpha >$ mod z) on peut remplacer $\frac{1}{z-\alpha}$

par $-\left[\frac{1}{\alpha} + \frac{z}{\alpha^2} + \frac{z^2}{\alpha^3} + \cdots + \frac{z^n}{\alpha^{n+1}} + \cdots\right]$

Portant dans l'équation (1) il vient

$$2\pi i\,\varphi(\alpha) = \int_{C_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z} + \alpha\int_{C_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^2} + \cdots + \alpha^n\int_{C_1} \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}} + \cdots$$

$$+ \frac{1}{\alpha}\int_{C_2} \varphi(z)dz + \frac{1}{\alpha^2}\int_{C_2} z\,\varphi(z)\,dz + \cdots + \frac{1}{\alpha^{n+1}}\int_{C_2} z^n\,\varphi(z)\,dz + \cdots$$

Tel est le développement annoncé, il est bon

pour toutes les valeurs de α dont le module est compris entre les rayons R_1, R_2 des 2 cercles.

Des théorèmes que nous venons d'établir il résulte immédiatement que toute fonction de z bien déterminée qui reste finie pour toute valeur finie de la variable est développable dans tout le plan par la formule de Taylor ; telles sont e^z, $\sin z$, $\cos z$. Ces fonctions ne deviennent infinies pour aucune valeur finie de z, mais elles peuvent augmenter au delà de toute limite pour des valeurs de z soit réelles soit imaginaires suffisamment grandes. D'ailleurs toute fonction bien déterminée qui n'est pas une constante devient infinie au moins pour une valeur de la variable ; cela résulte du théorème suivant.

Théorème. — Il n'y a pas de fonction bien déterminée qui ne puisse pour une valeur convenablement choisie de la variable devenir plus grande que toute quantité donnée.

En effet, je suppose que l'on puisse trouver une limite inférieure H du module de la fonction considérée $\varphi(z)$; alors cette fonction qui reste par hypothèse finie et bien déterminée dans tout le plan peut être développée par la série de Taylor et l'on a quelque soit α :

$$2\pi i\,\varphi(\alpha) = A_0 + A_1\alpha + \text{---} + A_n\alpha^n \text{---}$$

en posant

$$A_n = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z^{n+1}}$$

Cette intégrale étant prise le long d'un cercle absolument arbitraire : nous pouvons supposer le rayon de ce cercle infiniment grand et représenter les points de ce cercle par

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$$

on aura alors

$$A_n = \int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)\,Rie^{i\varphi}\,d\varphi}{R^{n+1}e^{(n+1)i\varphi}} = \frac{i}{R^n}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)\,e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{(n+1)i\varphi}}$$

mais l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(z)\,e^{i\varphi}}{e^{i(n+1)\varphi}}\,d\varphi \text{ est évidemment finie}$$

puisque le module de $\varphi(z)$ est inférieur à H et qu'en faisant sortir $\varphi(z)$ du signe $\int$ on obtient une différentielle trigonométrique dont l'intégrale entre 0 et 2π est nécessairement finie; comme pour obtenir A_n il faut diviser par R^n on obtient une valeur de A_n qui tend vers 0 lorsque n augmente définiment mais A_n est une constante, il est donc nécessairement nul.

Ce raisonnement s'applique à tous les termes de la série, sauf le 1er A_0; donc la fonction $\varphi(z)$ se réduit à A_0. c'est-à-dire est une constante. C.Q.F.D.

Il résulte immédiatement de ce théorème que: si $\varphi(z)$ est une fonction bien déterminée, l'équation $\varphi(z) = a$ a au moins une racine, quelque soit a:

En effet la fonction $\dfrac{1}{\varphi(z)-a}$ est bien déterminée: donc elle devient infinie au moins une fois: et on a $\varphi(z) = a$. C.Q.F.D.

Etude des fonctions mal déterminées.

Nous n'avons étudié jusqu'à présent que les fonctions bien déterminées c'est-à-dire les fonctions qui pour les points considérés du plan n'ont qu'une valeur. Nous allons maintenant considérer des fonctions admettant plusieurs déterminations en un même point du plan.

Telles sont par exemple $\sqrt{z}$, $\operatorname{arctg} z$, Lz, ... nous avons montré (Cours de 1re année p. 126 et suivantes) que les diverses déterminations de ces fonctions ne peuvent être séparées sans sacrifier la continuité (cas général) Elles peuvent cependant l'être si on ne considère la fonction qu'à l'intérieur de certains contours n'enfermant pas de points critiques (points pour lesquels la fonction devient indéterminée ou infinie) ou pour lesquels ses diverses valeurs se confondent.)

Une fonction mal déterminée peut résulter de l'intégration soit d'une fonction bien déterminée soit d'une fonction mal déterminée elle-même.

Dans le 1er cas la fonction est déterminée à une constante près et l'indétermination ne réside que

que dans cette constante même ; telle est la fonction logarithme de z qui a pour dérivée $\frac{1}{z}$ et qui est déterminée à une constante près égale à $2K\pi i$

Dans le 2° cas la fonction présente une indétermination plus complexe, elle peut être considérée comme résultant de l'intégration de sa dérivée et cette intégration donne des résultats différents suivant le contour le long duquel on intègre (et les résultats ne diffèrent plus comme dans le cas de l'intégration des fonctions bien déterminées seulement par une constante.)

Fonction $(z-\alpha)^m$. – Un des exemples que l'on rencontre le plus fréquemment de ces fonctions est la fonction

$$\varphi(z) = (z-\alpha)^m$$

l'exposant m étant une fraction $\frac{n}{p}$

On voit que pour une même valeur de z cette fonction a autant de déterminations différentes qu'il y a d'unités dans p; ces déterminations peuvent se déduire les unes des autres en multipliant l'une d'elles par les p racines $p^{ième}$ de l'unité, c'est-à-dire par l'un des facteurs $\left(\cos\frac{2K\pi}{p} + i \sin\frac{2K\pi}{p}\right)$ mais il est impossible de séparer ces p déterminations sans que la fonction devienne discontinue.

En effet considérons le point A qui représente la valeur $z = \alpha$ et le point M représentant la valeur z on a $z - \alpha = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ si R est la longueur AM et φ l'angle de AM avec Ox.

La fonction $\varphi(z)$ est alors égale à $R^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$. Si le point M décrit un contour fermé n'entourant pas le point A, R et φ reprennent les mêmes valeurs quand le point M revient à sa position primitive.

Si au contraire le point M décrit un contour fermé entourant le point A pour que les variations de $(z-\alpha)^m$ soient continues il faut nécessairement que φ augmente de 2π (si le point M est supposé tourner dans le sens trigonométrique) et la fonction se trouve remplacée par

$$R^m\left[\cos[m(\varphi+2\pi)] + i\sin[m(\varphi+2\pi)]\right]$$

c'est-à-dire multipliée par $\cos 2m\pi + i \sin 2m\pi$ facteur qui

n'est pas égal à l'unité puisque m est fractionnaire.
Il résulte immédiatement de là que si la variable se déplace d'un point à un autre suivant deux contours différents sa valeur finale est différente: c'est ainsi que si le point vient de M en M' en suivant l'un ou l'autre des deux chemins MNM' ou MPM' qui comprennent entre eux le point A, les valeurs finales sont différentes.

Intégration des fonctions mal déterminées.

On retrouve des indéterminations du même genre dans l'intégration des fonctions mal déterminées.
Considérons une fonction $\varphi(z)$ susceptible de plusieurs déterminations et l'intégrale de cette fonction le long d'une ligne AMZ

$$\int_{AMZ} \varphi(z)\,dz \qquad (1)$$

si la ligne AMZ ne passe par aucun point critique et que l'on fixe la valeur de la fonction en A, les valeurs en tous les points de la ligne AMZ sont absolument déterminées par la continuité et par conséquent l'intégrale (1) a une valeur bien déterminée. Supposons maintenant que l'on déplace infiniment peu la courbe AMZ entre les 2 points A et Z, sans qu'elle passe par un point critique; les valeurs de $\varphi(z)$ sont infiniment peu altérées, et la valeur de l'intégrale l'est aussi infiniment peu; mais nous supposons essentiellement que cette intégrale ne puisse pas prendre une suite continue et indéfinie de valeurs en un même point, c'est-à-dire encore qu'elle n'admet qu'un certain nombre de valeurs différant entre elles de quantités finies; l'intégrale devant être infiniment peu altérée, doit donc garder rigoureusement la même valeur.

On pourra donc ainsi remplacer de proche en proche le contour AMZ par un autre quelconque à la condition de ne franchir aucun point critique.

Donc comme dans le cas des fonctions bien déterminées on peut remplacer l'intégration le long d'un contour AMZ par l'intégration le long d'un autre contour quelconque AM'Z pourvu qu'il n'y ait aucun point critique entre les deux contours; de même l'intégrale le long d'un contour fermé n'enfermant aucun point critique sera nulle.-

Considérons maintenant les intégrales prises le long de 2 contours AMZ, AM'Z enfermant un point critique P pour lequel la fonction devienne indéterminée; je considère un cercle de rayon très-petit décrit du point P comme centre et les 2 contours AIKLZ et AIK'LZ empruntant l'un la moitié droite, l'autre la moitié gauche du cercle. L'intégrale prise le long du 1er est égale à l'intégrale prise le long de AMZ et l'intégrale le long du 2e à l'intégrale le long de AM'Z.

Or ces deux intégrales ont en commun les éléments correspondant à la ligne AI; leur différence comprend celle des deux intégrales prises le long des 2 segments IKL et IK'L et enfin de la différence des deux intégrales prises le long de LZ dans l'une et l'autre des 2 hypothèses: ces intégrales ne sont en effet généralement pas égales car la valeur de $\varphi(z)$ au point L est différente suivant que l'on a suivi à partir de I l'un ou l'autre des 2 contours IKL et IK'L qui enferment un point critique.- Il faut de plus remarquer que la différence des deux intégrales prises le long de LZ dans les deux cas peut dépendre de la forme et de la longueur de ce contour, donc la différence des 2 intégrales prises suivant AMZ et AM'Z ne dépend plus seulement du point critique P, mais aussi de la forme des contours.-

Exemple.- C'est ce qui a lieu dans l'exemple suivant.

Considérons la fonction $\frac{1}{\sqrt{z}}$ et intégrons la le long du cercle de rayon R ayant son centre à l'origine. Pour cela je pose

$$z = R(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Re^{i\varphi}$$

et l'intégrale devient

$$\int_0^{2\pi} R^{\frac{1}{2}}\, i\, e^{\frac{i\varphi}{2}}\, d\varphi = i\sqrt{R}\int_0^{2\pi} e^{\frac{i\varphi}{2}}\, d\varphi = i\sqrt{R}\left[\frac{2}{i}e^{\frac{i\varphi}{2}}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\sqrt{R}\,(e^{i\pi} - e^{0}) = -4\sqrt{R}$$

Cette intégrale prise le long du contour n'est donc pas nulle, mais de plus sa valeur dépend de la forme du contour ; cela tient à ce que le contour enferme le point 0 pour lequel la fonction devient infinie et change de signe. En effet φ représentant l'angle que fait avec $0x$ le vecteur du point z on a

$$\varphi(z) = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i \sin\frac{\varphi}{2}\right)}$$

lorsque le point décrit le cercle dans le sens trigonométrique il croît de 0 à 2π et par suite $\varphi(z)$ passe de la valeur

$$\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}(\cos 0 + i \sin 0)} = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}$$

à la valeur
$$\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi)} = -\frac{1}{R^{\frac{1}{2}}}$$

Non seulement l'intégrale que nous venons de calculer dépend du rayon du cercle le long duquel l'intégration a été conduite, mais elle dépend aussi du point de départ ; nous venons de la calculer en supposant que l'on parte au point A ; supposons maintenant que l'on intègre à partir du point B.

L'intégrale prise en partant de A se compose d'abord de l'intégrale prise suivant AB, puis de l'intégrale prise suivant BA'A. Si maintenant nous intégrons à partir du point B, nous avons d'abord l'intégrale prise suivant BA'A qui est égale à la précédente si nous prenons à l'origine la valeur

$$\varphi(z) = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + i\sin\frac{\varphi_1}{2}\right)}$$

φ_1 étant l'angle plus petit que 2π de 0B avec 0A ; nous avons ensuite l'intégrale prise le long de AB, mais à cause du chemin que nous venons de faire parcourir à z nous sommes obligés de prendre en revenant au point A

$$\varphi(z) = \frac{1}{R^{\frac{1}{2}}(\cos\pi + i\sin\pi)}$$

valeur qui est égale et de signe contraire à celle que nous avions en A pour la première intégration ; les éléments de l'intégrale suivant AB que nous obtenons maintenant sont égaux et de signes contraires à ceux de l'intégrale obtenue précédemment.

On a donc

$$\int_{ABA'A} - \int_{BA'AB} = 2\int_{AB}$$

L'intégrale $\int_{AB}$ étant calculée en prenant comme valeur initiale de $\sqrt{z}$ la valeur $R^{\frac{1}{2}}$

Autre exemple. — Considérons la fonction $\varphi(z) = z^{\frac{3}{2}}$ et intégrons la le long du cercle de rayon R ayant pour centre l'origine, il vient

$$\int_0^R z^{\frac{3}{2}} dz = \int_0^{2\pi} R^{\frac{3}{2}} (\cos\tfrac{3}{2}\varphi + i\sin\tfrac{3}{2}\varphi) R(-\sin\varphi + i\cos\varphi) d\varphi$$

$$= iR^{\frac{5}{2}} \int_0^{2\pi} (\cos\tfrac{5}{2}\varphi + i\sin\tfrac{5}{2}\varphi) d\varphi = \tfrac{2}{5}\, i R^{\frac{5}{2}} \Big[\sin\tfrac{5}{2}\varphi - i\cos\tfrac{5}{2}\varphi\Big]_0^{2\pi}$$

$$= \tfrac{4}{5} R^{\frac{5}{2}}$$

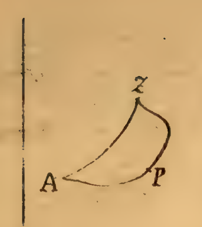
Cette intégrale est donc de nouveau différente de 0 et elle dépend de la forme du contour ; cela tient uniquement aux plusieurs déterminations de la fonction, car dans cet exemple elle ne devient pas infinie à l'intérieur du contour.

12e Leçon.

Intégration des fonctions mal déterminées. Fonction sin u.

Intégration d'une fonction mal déterminée suivant deux chemins différents.

Si la fonction $\varphi(z)$ comporte plusieurs déterminations, l'intégrale $\int_a^z \varphi(z)\,dz$ représente une fonction de z comportant elle aussi plusieurs déterminations ; mais les nombres de déterminations de

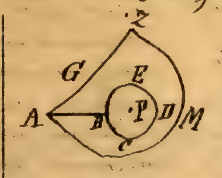


ces deux fonctions ne sont pas immédiatement liés ; il est évident que si la fonction $\varphi(z)$ a m déterminations différentes au point A l'intégrale prendra m valeurs différentes suivant que l'on partira de l'une de ces déterminations. On suppose toujours la valeur initiale donnée ; mais tout en partant d'une même valeur initiale l'intégrale considérée peut avoir des valeurs très différentes et en nombre plus ou moins considérable suivant la ligne le long de laquelle on intègre.

Nous avons vu dans la dernière leçon que lorsque la ligne AZ le long de laquelle on intègre est donnée (ne passant pas par un point critique) les valeurs de la fonction tout le long de cette ligne étant parfaitement déterminées l'intégrale l'est aussi et que lorsque la ligne AZ se déforme entre les points A et Z l'intégrale ne varie que par sauts brusques lorsque la ligne franchit un point critique.

Soit en effet P un point critique pour lequel les différentes déterminations de la fonction deviennent égales et, par suite, pour lequel on peut prendre arbitrairement l'une d'entre elles ; si l'on suit la ligne AP à partir de A la détermination de $\varphi(z)$ que l'on doit prendre est bien déterminée par la continuité, en P au contraire on peut prendre l'une quelconque d'entre elles ce qui rend l'intégrale le long du contour APZ indéterminée ; d'ailleurs suivant que le chemin d'intégration sera situé d'un côté ou de l'autre du point P la continuité obligera de choisir l'une ou l'autre de ces déterminations et la valeur de l'intégrale sera modifiée.

Soit par exemple à intégrer une fonction entre les points A et Z successivement suivant les 2 contours AGZ et AMZ enfermant le point critique P.



L'intégration le long de AMZ pourra toujours se ramener à l'intégration le long d'un contour absolument quelconque contournant le point P (et ne contournant aucun autre point critique) ; on prendra généralement le contour ABCDEBAZ constitué par un segment de

droite AB dirigé vers le point P, un cercle de rayon aussi petit que l'on veut tournant autour du point, le segment de droite BA et enfin le contour primitif AZ. ou encore, comme l'on dit, constitué par un lacet autour du point P et par le contour primitif.

Soit $\int_{AZ} \varphi(z)\,dz$ l'intégrale prise en allant simplement de A en Z en partant d'une valeur initiale donnée. Soit I_1 l'intégrale prise le long du lacet à partir de cette même valeur initiale ; la différence des deux intégrales prises suivant AGZ et suivant AMZ ne reproduit généralement pas I_1 car pour calculer l'intégrale suivant AGZ dans le 2e cas il faut partir de A avec une valeur de z imposée par le lacet que l'on vient de suivre et qui peut différer de la valeur initiale que l'on s'était donnée, par la même raison l'intégrale suivant le lacet ne se réduit pas à l'intégrale suivant le cercle BCDE.

Exemple. – Soit à calculer l'intégrale $\int_0^Z dz\,(1-z)^m$ l'exposant m n'étant pas entier.

La fonction $(1-z)^m$ présente au point $z=1$ un point critique, pour lequel elle s'annule ou devient infinie suivant que m est positif ou négatif, mais, (ce qui importe surtout) pour lequel les diverses déterminations de la fonction se confondent et s'échangent. Je suppose que je calcule successivement cette intégrale suivant la droite OZ et suivant un contour OMZ tournant autour du point critique.

Nous supposerons d'ailleurs que nous partions de la valeur initiale $(1)^m=1$

L'intégrale indéfinie est

$$\int (1-z)^m\,dz = -\frac{(1-z)^{m+1}}{m+1}$$

L'intégrale suivant OZ est la différence des valeurs arithmétiques de cette expression lorsqu'on y remplace z par Z puis par 0 [nous supposons que nous partions du radical arithmétique ; alors comme nous ne tournons pas autour du point P la continuité exige que nous conservions une valeur bien déterminée au radical ; on le

verrait immédiatement en mettant $1-z$ sous la forme $R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$]

On a donc

$$\int_{OZ} = \frac{1}{m+1} - \frac{(1-z)^{m+1}}{m+1}$$

Pour calculer l'intégrale le long de OMZ je la remplace par l'intégrale prise le long d'un lacet constitué par un segment de l'axe des x, un cercle de centre P et de rayon R, puis de nouveau le segment de l'axe des x et enfin le segment OZ. Cette intégrale comprendra 4 parties successives.

La 1re se calcule immédiatement comme la précédente:

$$\int_{OG} = \frac{1}{m+1} - \frac{R^{m+1}}{m+1} \qquad (1)$$

Pour calculer la 2e je remarque que le long du cercle on a:

$$z = 1 - R(\cos\omega + i\sin\omega) = 1 - Re^{i\omega} \qquad \omega \text{ variant de } 0 \text{ à } 2\pi$$

$$1 - z = Re^{i\omega}$$

$$dz = -iRe^{i\omega}d\omega \qquad \text{alors}$$

$$\int_{GH'IHG} = -iR^{m+1}\int_0^{2\pi} e^{(m+1)i\omega}d\omega = -iR^{m+1}\left[\frac{e^{(m+1)i\omega}}{(m+1)i}\right]_0^{2\pi}$$

D'où finalement

$$\int_{GH'IHG} = R^{m+1}\left[\frac{1}{m+1} - \frac{e^{2\pi i}}{m+1}\right] \qquad (2)$$

La valeur de $(1-z)^m$ dont nous étions partis pour faire cette intégration était $(1-z)^m = R^m(\cos m\varphi + i\sin m\varphi)$ pour $\varphi = 0$ soit R^m; dans celle à laquelle nous sommes nécessairement amenés après avoir parcouru le cercle, il faut remplacer φ par 2π, c'est donc:

$$(1-z)^m = R^m(\cos 2m\pi + i\sin 2m\pi) = R^m e^{2m\pi i}$$

Lorsque nous prendrons l'intégrale le long de GO nous retrouverons donc tous les éléments de l'intégrale le long de OG multipliés par ce facteur $e^{2m\pi i}$ et changés de signe parce que l'intégration se fait en sens inverse;

On a donc

$$\int_{GO} = \frac{e^{2m\pi i} R^{m+1}}{m+1} - \frac{e^{2m\pi i}}{m+1} \qquad (3)$$

Une remarque analogue s'applique à l'intégrale $\int_{OZ}$ qui nous reste maintenant à calculer ; la valeur dont nous devons partir en 0 est $e^{2m\pi i}$ tandis que dans le calcul primitif nous partions de l'unité.
Tous les éléments de la nouvelle intégrale sont égaux à ceux de la 1ère multipliés par ce facteur ; on a donc ici :

$$\int_{OZ} = \frac{e^{2m\pi i}}{m+1} \quad \frac{e^{2m\pi i}(1-z)^{m+1}}{m+1}. \qquad (4)$$

Faisant la somme des expressions (1) (2) (3) (4) il vient

$$\int_{OMZ} = \frac{1}{m+1} - \frac{e^{2m\pi i}(1-z)^{m+1}}{m+1}.$$

Si on compare cette intégrale à l'intégrale $\int_{0Z}$ précédemment trouvée, on voit que le terme répondant au point z se trouve multiplié par $e^{2m\pi i}$ c'est-à-dire par une des puissances $m^{ième}$ de l'unité. On voit de plus, comme cela était évident à priori, que l'intégrale $\int_{AMZ}$ est indépendante du rayon du cercle qui constitue le lacet.

Fonction arc sin z

Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

u est une fonction de z que nous désignerons par arc sin z (cette définition répond à une fonction comme dans le cas où z est réel) et inversement nous poserons $z = \sin u$.

La fonction u admet évidemment plusieurs déterminations car la fonction à intégrer est elle-même mal déterminée. Nous allons chercher les relations qui existent entre les différentes déterminations de u pour une même valeur de z. Les points critiques de $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$ sont ± 1.

Nous devons donc étudier de quelle manière se trouve modifiée l'intégrale si au lieu de la prendre le long de la droite OZ, nous la prenons le long d'un contour enfermant l'un ou l'autre des points critiques.

Nous supposerons que nous partions de la valeur initiale $\frac{1}{\sqrt{1-z^2}} = +1$ pour $z = 0$. Soit u la valeur de l'intégrale prise le long de la droite OZ. L'intégrale prise le long d'un contour enfermant le point P se ramène comme on a vu à l'intégrale le long d'un lacet entourant ce point, plus une nouvelle intégrale suivant OZ c'est-à-dire à la somme

$$\int_{OG} + \int_{GKG} + \int_{GO} \int_{OZ} \quad (1)$$

Comme dans tous les cas précédents $\int_{GKG}$ contiendra une puissance positive de R en facteur; elle sera donc nulle si R est infiniment petit; on peut le voir ainsi qu'il suit:

Pour faire parcourir à z le cercle de centre P et de rayon R il suffit de poser $1-z = R(\cos\omega + i\sin\omega)$ et de faire varier ω de 0 à 2π.

$$\text{mais } \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dz}{\sqrt{1-z}\,\sqrt{1+z}}$$

$$\text{différera très peu de } \frac{dz}{\sqrt{2}\,\sqrt{1-z}}$$

lorsque z est très-voisin de l'unité; dz contient R en facteur; $\sqrt{1-z}$ contient $R^{\frac{1}{2}}$ en facteur. $R^{\frac{1}{2}}$ sera d'ailleurs multiplié par une intégrale de lignes trigonométriques

prise entre les limites 0 et 2π qui est forcément finie ; donc $\int_{GKG}$ est bien infiniment petite avec R.

La somme (1) se réduit donc aux intégrales :

$$\int_{OP}+\int_{PO}+\int_{OZ}$$

$$\int_{OP}=\int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

Cette intégrale prise pour des valeurs réelles de la variable est connue et égale à $+\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale $\int_{PO}$ doit être calculée en prenant comme limite inférieure non pas +1 mais −1, car le point qui représente la variable a tourné autour de P [si on a posé $1-z=R(\cos\omega+i\sin\omega)$; dans $\sqrt{1-z}=R^{\frac{1}{2}}(\cos\frac{\omega}{2}+i\sin\frac{\omega}{2})$ ω ayant passé de 0 à 2π, $\frac{\omega}{2}$ a passé de 0 à π et par suite $\sqrt{1-z}$ a changé de signe ; il en sera de même de $\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=\frac{dz}{\sqrt{1-z}\sqrt{1+z}}$]

On a donc ;

$$\int_{PO}=\int_{-1}^{0}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}=+\frac{\pi}{2}$$

Enfin, en revenant au point 0 le signe du radical est changé ; donc le nouveau $\int_{OZ}$ sera calculé en donnant à la différentielle des valeurs égales et de signes contraires à celles qu'elle avait quand nous avons calculé u

On a donc

$$\int_{OZ}=-u$$

La somme (1) se réduit donc à $\pi-u$

Si on fait décrire à la variable un lacet entourant le 2e point critique P', puis la droite OZ on arrive de même à la valeur $-\pi-u$ pour l'intégrale.

Si maintenant on fait décrire à z un lacet autour de chacun des points critiques, puis enfin Oz, on arrive pour l'intégrale à la valeur $2\pi+u$; en effet l'intégrale suivant chaque lacet donne π et l'intégrale suivant Oz est égale à u, car le signe de la différentielle ayant changé une fois dans le parcours de chacun des lacets se reproduit.

Donc l'intégrale

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$$

peut être égale soit à u soit à $\pi-u$ soit à $2\pi+u$ suivant le chemin d'intégration (plus généralement à $(2K+1)\pi-u$ ou à $2K\pi+u$ lorsqu'on fait tourner plusieurs fois le chemin d'intégration autour des points critiques.)

Comme on a par définition $z=\sin u$ on voit que l'on a en même temps $z=\sin u=\sin(\pi-u)=\sin(2\pi+u)$ ou même d'une façon plus générale

$$z=\sin u=\sin(\overline{2K+1}\,\pi-u)=\sin(2K\pi+u)$$

Fonction cos u

Nous prendrons comme définition de cette fonction l'équation $\cos u=\sqrt{1-z^2}$ le radical ayant dans chaque cas le même signe que dans l'élément de l'intégrale qui représente $\sin u$. Aussi chaque fois que nous calculerons $\sin u$ suivant un contour déterminé, il en résultera une valeur unique et bien déterminée de $\cos u$; lorsque le chemin tournera une fois autour de l'un des points critiques, $\sin u$ sera remplacé par $\sin(\pi-u)$ et le cosinus changera de signe; au contraire lorsque le chemin tournera à la fois autour des deux points critiques $\sin u$ sera remplacé par $\sin(2\pi+u)$ et le cosinus se reproduira exactement.

Il faut observer que si nous posions $\cos u=\sqrt{1-\sin^2 u}$ ce qui paraît être la même chose, $\cos u$ ne serait défini qu'au signe près.

Dérivées du sinus et du cosinus. — De ces définitions

on peut déduire aisément les propriétés connues des lignes trigonométriques d'arcs réels qui se trouvent ainsi étendues à celles des arcs imaginaires.

On a par définition $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = u$

D'où $du = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ et $\frac{dz}{du} = \sqrt{1-z^2}$

On a par définition $z = \sin u$

On a donc $\frac{d \sin u}{du} = \cos u$

De l'équation $\frac{dz}{du} = \sqrt{1-z^2}$ on déduit $\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 1-z^2$

et dérivant par rapport à u.

$$2\frac{dz}{du} \cdot \frac{d^2z}{du^2} = -2z\frac{dz}{du} \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2z}{du^2} = -z$$

comme $\frac{dz}{du} = \cos u$ et $z = \sin u$ on a

$$\frac{d \cos u}{du} = -\sin u$$

Théorème.- On a $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$

En effet soit u défini par la formule

$$\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = u$$

On a $\sin u = z$

$\cos u = \sqrt{1-z^2} = y$

Il résulte immédiatement de ces définitions que

$y^2 + z^2 = 1$

d'où en différentiant

$$y\,dy + z\,dz = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{z} = -\frac{dz}{y}$$

La valeur commune de ces 2 rapports est $-du$ puisque

$$du = \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \frac{dz}{y}$$

On a donc $du = -\frac{dy}{z} = \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}}$

D'où en intégrant entre les valeurs correspondant à $z=0$ et $z=z$ c'est-à-dire entre $y=1$ et $y=y$:

$$u = -\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} - \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

Mais l'intégrale $\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$ qui correspond à des valeurs réelles de la variable est égale comme on sait à $\frac{\pi}{2}$ On a donc

$$\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{\pi}{2} - u$$

ou en prenant les sinus

$$y = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

Mais par définition $\quad y = \cos u$

Donc $\cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$ C.Q.F.D.

Formule d'addition des sinus

Considérons les deux intégrales

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

On a par définition

$$x = \sin u \qquad y = \sin v$$

Nous allons établir l'expression de $\sin(u+v)$. Je suppose, à cet effet, x et y liés de telle manière que $(u+v)$ soit constant. Il faut et il suffit pour cela que l'on ait :

$$du + dv = 0$$

c'est-à-dire $du = -dv$

Or $du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ (1) $dv = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$

On a donc $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -du$ (2)

Des 2 équations (1) et (2), on déduit en élevant au carré

$\left(\frac{dx}{du}\right)^2 = 1-x^2$ D'où en dérivant par rapport à u $\frac{d^2x}{du^2} = -x$

$\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = 1-y^2$ $\frac{d^2y}{du^2} = -y$

Multipliant la première de ces équations par y, la 2e par x et retranchant il vient $y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2} = 0$

On reconnaît la dérivée de $\left(y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}\right)$ (3). Cette expression est donc constante.

Mais $x = \sin u$ $\frac{dx}{du} = \cos u$

$y = \sin v$ $\frac{dy}{dv} = \cos v$

et par suite $\frac{dy}{du} = -\cos v$ puisque $du = -dv$

Portant dans (3), il vient :

$$\sin v \cos u + \sin u \cos v = \text{Constante}$$

Donc lorsque $(u+v)$ est constant, $(\sin v \cos u + \sin u \cos v)$ l'est en même temps ; c'est-à-dire que cette expression est une fonction de $(u+v)$

$$\sin v \cos u + \sin u \cos v = f(u+v)$$

Faisant $v = 0$ il reste (en remarquant que sin 0 est nul et cos 0 égal à l'unité) : $\sin u = f(u)$

la fonction f de $(u+v)$ est donc le sinus de cette expression et l'on a

$$\sin(u+v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u.$$

Dérivant par rapport à u ou par rapport à v, il vient la formule d'addition des cosinus

$$\cos(u+v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v.$$

13e Leçon.

Propriétés des fonctions inverses des fonctions définies par des intégrales. Formule d'addition.

Après avoir défini $x = \sin u$ et $y = \sin v$ au moyen des équations

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = u \quad \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = v$$

nous avons cherché à établir la formule qui lie $\sin(u+v)$ aux sinus et cosinus de u et de v.

On peut indiquer pour résoudre ce problème la méthode générale suivante:

Je suppose $u+v$ constante, il en résulte l'équation $du + dv = 0$.
qui se traduit immédiatement par l'équation différentielle entre x et y.

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0.$$

nous chercherons à intégrer cette équation différentielle (autrement qu'en exprimant que la somme des fonctions dont les deux différentielles y figurent est constante.) c'est-à-dire que nous chercherons une relation entre x et y de la forme

$$\varphi(x, y) = C^{te}$$

Cette fonction φ constante en même temps que $u+v$ est donc une certaine fonction de $u+v$ et l'on a (1)

$$\varphi(x, y) = F(u+v).$$

Dans le cas où x et u s'annulent en même temps faisant $u=0$ dans l'équation (1) il vient $\varphi(x) = F(u)$ ou comme x est égal à la fonction considérée de u qui est ici $\underline{\sin u}$ on a

$$F(u) = \varphi_1(\sin u)$$

φ_1 représentant la fonction φ dans laquelle on supprime tous les termes en y par exemple et par suite

$$F(u+v) = \varphi_1\left[\sin(u+v)\right]$$

l'équation (1) s'écrit donc

$$\varphi_1\left[\sin(u+v)\right] = \varphi(\sin u, \sin v)$$

Résolvant cette équation on en déduit

$$\sin(u+v) = \psi(\sin u, \sin v)$$

Ce qui résout le problème.

Cette méthode est évidemment générale

Formule d'addition des sinus.

Appliquons cette méthode à l'exemple précédent : il vient à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0 \quad \text{ou}$$

$$(1) \quad dx\sqrt{1-y^2} + dy\sqrt{1-x^2} = 0.$$

Intégrons entre $x=0$ et $x=x$ et entre les valeurs correspondantes de y : Pour cela je remarque que en intégrant par parties on a

$$\int dx\sqrt{1-y^2} = x\sqrt{1-y^2} + \int xy\,\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$$

et
$$\int dy\sqrt{1-x^2} = y\sqrt{1-x^2} + \int xy\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

L'intégration de l'équation (1) donne donc

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} + \int xy\left(\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}\right) = C^{te}$$

L'intégrale restante est nulle en vertu de l'équation différentielle elle-même : Il reste donc l'intégrale cherchée

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} = f(u+v)$$

Remplaçant dans le 1er membre x et y par leur valeur

$$\sin u \cos v + \sin v \cos u = f(u+v)$$

faisant $v = 0$. on a $f(u+v) = \sin(u+v)$

Formule d'addition des tangentes.

Posons $$u = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2}$$

Nous aurons par définition

$\operatorname{tg} u = x$ et de même

si $\operatorname{tg} v = y$ $$v = \int_0^y \frac{dy}{1+y^2}$$

Soit à chercher l'expression de $\operatorname{tg}(u+v)$

L'équation différentielle sera

$$\frac{dx}{1+x^2} + \frac{dy}{1+y^2} = 0 \quad \text{ou}$$

$$dx + dy + x^2 dy + y^2 dx = 0 \quad \text{ou encore}$$

$$dx + dy + (y\,dx + x\,dy)(y + x) - xy(dx + dy) = 0$$

ou

$$(dx+dy)(1-xy) + (y\,dx + x\,dy)(y+x) = 0$$

ou enfin

$$\frac{dx+dy}{x+y} + \frac{x\,dy + y\,dx}{1-xy} = 0$$

Intégrant il vient

$$L(x+y) - L(1-xy) = C^{te}$$

d'où $$\frac{x+y}{1-xy} = C^{te}$$

c'est-à-dire

$$\frac{x+y}{1-xy} = f(u+v).$$

Remplaçant x et y en fonction de u et de v et faisant $v = 0$ on voit que $f(u+v)$ se réduit à $\operatorname{tg}(u+v)$: On a donc finalement

$$tg\,(u+v) = \frac{tg\,u + tg\,v}{1 - tg\,u\,tg\,v.}$$

Fonction Exponentielle

Considérons l'intégrale

$$\int_1^x \frac{dx}{x} = u$$

nous aurons $u = Lx$ et

$$x = e^u$$

soit de même $y = e^v$, v étant défini par l'équation

$$\int_1^y \frac{dy}{y} = v$$

Je me propose de chercher l'expression e^{u+v}

Comme précédemment si l'on suppose

$u + v = C^{te}$ on aura

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0$$

$$y\,dx + x\,dy = 0$$

c'est-à-dire en intégrant

$$(1)\quad xy = C^{te}$$

la constante étant une fonction de $u+v$ on a

$$e^u e^v = f(u+v)$$

faisant $v=0$ il vient en remarquant que $e^0 = 1$

$$f(u) = e^u$$

Donc

$$e^u e^v = e^{u+v}$$

Fonction u^2

Soit de même

$$\int_0^x \frac{dx}{2\sqrt{x}} = u$$

d'où $u = \sqrt{x}$ et $x = u^2$

$$\int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}} = v \quad v = \sqrt{y} \quad y = v^2$$

Proposons nous de calculer $(u+v)^2$
Si je suppose $u+v = C^{te}$ on aura

$$du + dv = 0 \text{ ou :}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} + \frac{dy}{\sqrt{y}} = 0$$

ou en multipliant par $\sqrt{x}+\sqrt{y}$

$$dx + dy + \frac{dx\sqrt{y}}{\sqrt{x}} + \frac{dy\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = 0$$

mais
$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2d\sqrt{x}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = 2d\sqrt{y}$$

L'équation différentielle s'écrit donc

$$dx + dy + 2\left[\sqrt{x}\, d\sqrt{y} + \sqrt{y}\, d\sqrt{x}\right] = 0.$$

Elle est immédiatement intégrable et donne

$$x + y + 2\sqrt{xy} = C^{te}$$

ou remarquant que la Cte est une fonction de $u+v$ et en remplaçant x et y en fonction de $u+v$

$$u^2 + v^2 + 2uv = f(u+v).$$

et $f(u+v)$ est évidemment $(u+v)^2$.

Fonction u^3.

On peut de même trouver l'expression du cube d'un binôme.
Soit
$$\int_0^x \frac{dx}{3x^{2/3}} = u \text{ d'où}$$

$$u = \sqrt[3]{x} \text{ et } x = u^3$$

et
$$\int_0^y \frac{dy}{3y^{2/3}} = v. \quad \text{d'où}$$

$$v = \sqrt[3]{y} \text{ et } y = v^3$$

Si $u+v$ reste constant on aura

$$\frac{dx}{3x^{2/3}}+\frac{dy}{3y^{2/3}}=0.$$

multipliant par $3\left[x^{1/3}+y^{1/3}\right]^2$ il vient

$$\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2dx}{x^{2/3}}-\frac{(x^{1/3}+y^{1/3})^2dy}{y^{2/3}}=0$$

$$\left[1+\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}\right]^2dx+\left[1+\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}\right]^2dy=0$$

$$\left[1+2\cdot\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}+\left(\frac{y}{x}\right)^{2/3}\right]dx+\left[1+2\left(\frac{x}{y}\right)^{1/3}+\left(\frac{x}{y}\right)^{2/3}\right]dy=0.$$

C'est une différentielle de la forme $Mdx+Ndy$: elle est intégrable car on a

$$\frac{dM}{dy}=\frac{dN}{dx}\text{; en effet}$$

$$\frac{dM}{dy}=\frac{2}{3}\left[x^{-\frac{1}{3}}y^{-\frac{2}{3}}+y^{-\frac{1}{3}}x^{-\frac{2}{3}}\right]$$

Si l'on calculait $\frac{dN}{dx}$ on trouverait le même résultat, mais cela est évident à priori car cette expression est symétrique en x et y. Intégrant par la méthode indiquée il vient en intégrant par rapport à x

$$(1)\quad x+3y^{\frac{1}{3}}x^{\frac{2}{3}}+3y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{1}{3}}+F(y)=C^{te}$$

$F(y)$ pourrait se calculer par la méthode générale indiquée : il est immédiat que cette fonction se réduit à y car le 1er membre de (1) doit être symétrique en x et y : Il vient donc en remplaçant x et y en fonction de u et de v

$$u^3+3u^2v+3uv^2+v^3=f(u+v)$$

et $f(u+v)$ est évidemment $(u+v)^3$

Etude de la fonction. $\operatorname{tg} z$.

Dans la leçon précédente nous avons établi

les principales propriétés de la fonction $\sin u$ en la dé-finissant par la fonction inverse d'une intégrale.

On peut de même étudier la fonction $\operatorname{tg} u$

Je pose

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = u \quad e \quad z = \operatorname{tg} u$$

Nous avons déjà établi la formule d'addition pour les tangentes.

Je dis que l'on a

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} u}$$

En effet, faisons le changement de variable

$z = \frac{1}{y}$ il vient

$$\int_\infty^y \frac{-\frac{dy}{y^2}}{1+\frac{1}{y^2}} = u \quad \text{ou}$$

$$-\int_\infty^y \frac{dy}{1+y^2} = +\int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} - \int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = +\frac{\pi}{2} - \int_0^y \frac{dy}{1+y^2}$$

Par suite

$$\int_0^y \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{2} - u$$

égalité qui par définition donne

$$y = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$$

or $y = \frac{1}{z} = \frac{1}{\operatorname{tg} u}$: Le théorème est donc démontré.

On sait que les fonctions circulaires de variables réelles se ramènent aux exponentielles ; il est aisé de montrer que les fonctions circulaires de variables ima-ginaires que nous venons de définir s'y rattachent de même.

En effet considérons la fonction exponentielle définie par les relations

$$\int_1^z \frac{dz}{z} = u \quad z = e^u$$

Je pose $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$

il faut bien observer ici que φ étant un arc réel ou imaginaire, cette équation ne suppose nullement le module de z égal à l'unité.

Faisant la substition dans l'intégrale il vient

$$\int_0^{\varphi} i\,d\varphi = u \quad \text{ou} \quad u = i\varphi$$

On a donc en revenant à la définition de e^u

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi.$$

C'est la formule bien connue dans le cas où φ est réel et qui se trouve ainsi généralisée.

De même $e^{-i\varphi} = \cos\varphi - i\sin\varphi$

Ces deux formules ramènent immédiatement l'étude des fonctions circulaires à celle de la fonction exponentielle et inversement.

La fonction $\operatorname{tg} u$ s'exprime immédiatement en sin et cos. soit

$$\int_0^z \frac{dz}{1+z^2} = u \text{ et } z = \operatorname{tg} u$$

je fais le changement de variable

$$z = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} \text{ il vient}$$

$$\int_0^y \frac{-dy\sqrt{1-y^2} + \frac{y^2\,dy}{\sqrt{1-y^2}}}{1-y^2} \frac{1}{1+\frac{y^2}{1-y^2}} = u \quad \text{ou}$$

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = u$$

Ce qui entraîne par suite de la définition du sinus $y = \sin u$ et $\sqrt{1-y^2} = \cos u$

mais $z = \dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ .. donc

$$\operatorname{tg} u = \frac{\sin u}{\cos u}$$

C'est la formule bien connue dans le cas ou u est réel qui se trouve ainsi étendue au cas où u est quelconque.

14e Leçon.

Fonctions elliptiques - Définition - Double périodicité.

Fonction amplitude u.

Considérons l'intégrale

$$u = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

cette intégrale u est fonction de φ et réciproquement φ est fonction de u ; nous désignerons cette dernière fonction sous le nom de amplitude u et nous écrirons

$$\varphi = \mathrm{am}.\, u$$

Dans ce qui suit nous supposerons toujours la constante k comprise entre 0 et 1 de telle sorte que si nous ne donnons que des valeurs réelles à φ, les valeurs correspondantes de u seront réelles ; si de plus nous supposons le radical (qui ne peut jamais s'annuler et par suite jamais changer de signe) pris avec le signe +, les deux fonctions u et φ croîtront simultanément, et à une valeur de l'une d'entre elles correspondra une valeur et une seule de l'autre. Si l'on donne à φ la valeur particulière $\frac{\pi}{2}$, u prend une valeur déterminée que nous désignerons par ω, ω est évidemment supérieur à $\frac{\pi}{2}$, car on a

$$\frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} > 1$$

et par suite $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} > \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \frac{\pi}{2}$

Il est évident que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$ est égal à 2ω, car lorsque φ varie successivement de 0 à $\frac{\pi}{2}$ puis de $\frac{\pi}{2}$ à π les valeurs du sinus se reproduisent exactement

mais en ordre inverse.

Si l'on remarque que lorsque φ augmente de π les valeurs du sinus se reproduisent exactement dans le même ordre au signe près, il en résulte que la différentielle à intégrer se reproduit exactement, et l'on aura par suite ;

$$\int_a^b \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = \int_{a\pm k\pi}^{b\pm k\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Comme d'après ce qui précède on a

$$\int_0^{n\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2n\omega$$

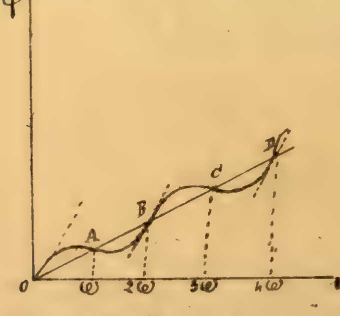
on a d'une façon générale

$$\int_0^{n\pi+\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} = 2n\omega + \int_0^{\varphi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

Cette propriété se traduit encore par l'équation inverse.

$$\operatorname{am}(2n\omega+u) = n\pi + \operatorname{am} u \quad (1)$$

Cette équation fait voir que pour étudier la fonction am u, il suffira de donner à u les valeurs comprises entre 0 et 2ω, les valeurs de la fonction pour toutes les autres valeurs de la variable pouvant se déduire des précédentes au moyen de cette formule. Si l'on veut tracer une courbe représentant les variations de la fonction $\varphi(u) = \operatorname{am} u$, cette courbe passera par les points successifs



$$\varphi = \frac{\pi}{2} \qquad u = \omega$$

$$\varphi = \pi \qquad u = 2\omega$$

$$\varphi = k\frac{\pi}{2} \quad u = k\omega$$

ces points sont repartis sur une droite passant par l'origine et de coefficient angulaire $\frac{\pi}{2\omega}$ (plus petit que 1

Comme nous l'avons montré). la courbe cherchée trace une série de boucles successives de part et d'autre de cette droite ; d'ailleurs il résulte de l'équation (1) qu'aux points B, D etc la courbe se reproduit telle qu'elle était en 0, mais transportée parallèlement à elle-même. Il est d'ailleurs évident qu'à l'origine la tangente est à 45° car pour $\varphi = 0$ on a $d\varphi = du$

Fonction sinus amplitude u

Au lieu d'étudier la fonction φ, on étudie son sinus ; c'est-à-dire que l'on étudie la fonction $z = \sin\varphi$. Pour lier directement z et u il suffit de faire le changement de variable $z = \sin\varphi$ dans l'intégrale u il vient ainsi :

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-k^2z^2}}$$

par définition z sera la fonction sinus amplitude de u que nous représenterons par $z = \sin.\,\mathrm{am}.\,u$

Il est immédiat que cette fonction se reproduit égale à elle-même pour des valeurs différentes de u ; en effet la fonction à intégrer admettant plusieurs déterminations l'intégrale u est susceptible de plusieurs valeurs différentes pour une même valeur de z ; cette valeur de z représente alors le sinus amplitude de ces différentes déterminations de u. Nous allons étudier les relations qui lient ces différentes déterminations de u. La fonction à intégrer admet les 4 points critiques $z = \pm 1$ et $z = \pm \frac{1}{k}$ lorsque le contour d'intégration tourne autour de l'un de ces points critiques le signe de l'un des radicaux se trouve changé.

Tout contour d'intégration peut comme on sait être remplacé par une suite de lacets autour des points critiques plus une ligne arbitraire allant de l'origine à l'extrémité du contour primitif. C'est ainsi que toute intégration entre 0 et z pourra être remplacée par une intégration le long d'une série de lacets tournant autour des divers points critiques A, A', B, B' et le long de la droite 0z. Nous pouvons remarquer immédiatement que le résultat de l'intégration le long d'un cercle tournant

au tour de l'un des points critiques sera toujours nul si le rayon du cercle est infiniment petit ; en effet considérons par exemple un cercle décrit autour du pt. A ($z=1$) si le rayon est infiniment petit z diffère infiniment peu de l'unité et par suite $\sqrt{1-K^2z^2}$ diffère infiniment peu de $\sqrt{1-K^2}$ et $\sqrt{1-z^2}$ diffère aussi infiniment peu de $\sqrt{2(1-z)}$.

Si l'on pose $z = 1 - R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

l'intégrale devient

$$\int_0^{2\pi} \frac{-iR(\cos\varphi + i\sin\varphi)\,d\varphi}{\sqrt{1-K^2}\sqrt{2}\,R^{\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{-i\,R^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2(1-K^2)}}\int_0^{2\pi}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right)d\varphi$$

elle est évidemment nulle en même temps que R.

Période réelle.

Ceci posé étudions la valeur de l'intégrale prise le long des différents contours composés des lacets et de la droite OZ ; nous supposerons d'ailleurs que l'on prenne toujours à l'origine les radicaux avec le signe + et nous désignerons par u le résultat de l'intégration faite directement suivant la droite OZ.

Intégrons suivant le lacet tournant autour du point A et suivant OZ ; la valeur u' de l'intégrale sera

$$u = \int_{OA} + \int_{AO} + \int_{OZ}$$

$$\int_{OA} = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2z^2}} = \omega$$

O A B

L'intégrale $\int_{AO}$ est aussi égale à ω car on retrouve dans cette intégrale tous les éléments de la précédente changés deux fois de signe, une fois en raison du changement de sens de l'intégration ; et une deuxième fois en raison du changement de signe de $\sqrt{1-z^2}$. Enfin l'intégrale $\int$ est égale à $-u$ puisque pour la calculer on part $\int_{OZ}$ du point O avec la valeur -1 pour le radical $\sqrt{1-z^2}$ ce qui change le signe de tous les éléments de l'intégrale.

On a donc

$$u' = 2\omega - u$$

Il résulte immédiatement de là que

$$\sin . \mathrm{am} . (2\omega - u) = \sin \mathrm{am} . u \quad (1)$$

car ces deux sinus amplitude sont par définition égaux à z.

Si l'on fait de même l'intégration autour d'un lacet entourant le point A', on arrive à la formule

$$\sin \mathrm{am} (-2\omega - u) = \sin . \mathrm{am} . u \quad (2)$$

Des deux formules précédentes on peut déduire la suivante

$$\sin \mathrm{am} (4\omega + u) = \sin . \mathrm{am} . u \quad (3)$$

Cette formule s'établit d'ailleurs directement en intégrant successivement le long des deux lacets tournant autour de A et de A', puis le long de Oz l'intégrale obtenue est égale à

$$\int_{OA} + \int_{AO} + \int_{OA'} + \int_{A'O} + \int_{Oz}$$

Chacune des 4 premières intégrales est égale à ω. en effet dans la première la différentielle dz et les radicaux sont positifs, dans la seconde et la troisième la différentielle est négative, mais l'un des radicaux l'est en même temps, enfin dans la 4e la différentielle et le radical sont redevenus positifs.- D'ailleurs comme en revenant en O le radical est redevenu positif $\int_{Oz}$ est égal à u.

La valeur totale de l'intégrale est donc $4\omega + u$ et l'on a bien

$$\sin . \mathrm{am} . (4\omega + u) = \sin \mathrm{am} . u$$

Cette équation exprime que la fonction est périodique et de période 4ω ; cette période est évidemment réelle.

Période imaginaire.- La fonction admet une autre période imaginaire répondant aux points critiques B et B'

Intégrons le long d'un lacet entourant le point B et évitons le point A en faisant un demi-cercle infiniment petit au dessus ou au dessous de ox (il faut bien observer que suivant que ce petit cercle sera tracé au dessous

ou au dessus de ox le signe de $\sqrt{1-z^2}$ et par suite celui de l'intégrale suivant AB seront altérés).

Nous calculons donc l'intégrale

$$u = \int_{0\alpha} + \int_{\alpha\alpha'} + \int_{\alpha'\beta} + \int_{\beta\beta'\beta} + \int_{\beta\alpha'} + \int_{\alpha'\alpha} + \int_{\alpha 0} + \int_{0z}$$

Comme précédemment tous les éléments de l'intégrale relatifs aux cercles seront nuls si ceux-ci sont infiniments petits ; et il reste

$$u = \int_{0A} + \int_{AB} + \int_{BA} + \int_{A0} + \int_{0z}$$

$$\int_{0A} = \omega$$

$\int_{AB}$ est égale à $\int_{BA}$ car ces deux intégrales contiennent les mêmes éléments avec le même signe (car il y a eu double changement de signe) ; la valeur commune de ces deux intégrales est

$$\int_1^{\frac{1}{k}} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$$

tous les éléments de cette dernière intégrale étant des imaginaires pures celle ci l'est aussi soit donc $\omega' i$ sa valeur

$\int_{A0}$ est évidemment égal à ω, et $\int_{0z}$ à $-u$

On a donc $u = 2\omega + 2\omega' i - u$

On en déduit la formule

$$\sin am (2\omega + 2\omega' i - u) = \sin am\, u \quad (4)$$

en combinant cette formule avec la formule (1) on obtient la formule suivante.

$$\sin am (2\omega' i + u) = \sin am\, u \quad (5)$$

qui montre que la fonction admet une deuxième période qui est une imaginaire pure.

Cette dernière formule (5) peut s'obtenir directement en ajoutant au chemin d'intégration précédent avant $0z$, un lacet autour du point A ; celui-ci retranche

2ω à l'intégrale, et rend le signe + à u, ce qui lui donne la forme $u_1 = 2\omega' i + u$

Des formules (1) (2) (4) et de la formule

$$\sin \text{am}(-2\omega - 2\omega' i - u) = \sin . \text{am} . u \quad (6)$$

relative à l'intégration le long du lacet qui entoure le point B', on peut par des combinaisons convenables obtenir toutes les valeurs possibles de u pour lesquelles sin.am u se reproduit.

Il résulte de ces formules, comme nous l'avons montré, que la fonction admet les deux périodes 4ω et $2\omega' i$

Rectangle des périodes. Il résulte immédiatement de cette double périodicité qu'il suffit de connaître les valeurs de la fonction pour toutes les valeurs de la variable dont la partie réelle est inférieure à 4ω et dont la partie imaginaire est inférieure à $2\omega'$ (c'est-à-dire encore pour toutes les valeurs de la variable intérieures au rectangle de côtés 4ω et $2\omega'$) pour connaître complètement la fonction.

En effet on peut couvrir tout le plan de tels rectangles et la valeur de la fonction en un point P_1 d'un des rectangles est évidemment la même qu'en tous les points P_2 P_3 P_4 etc. situés de même dans les rectangles successifs.

Il suffit même pour connaître toutes les valeurs de la fonction de connaître celles-ci dans un espace égal au quart de ce rectangle.

En effet on a évidemment

$$\sin \text{am}(-u) = -\sin \text{am}\, u$$

cela résulte de ce fait que si l'on change z en $-z$ dans l'intégrale qui définit u, celle-ci change de signe; on l'exprime en disant que sin am est une fonction impaire. Il résulte immédiatement de cette dernière relation en tenant compte de la périodicité que l'on a

$$\sin \text{am}(4\omega - u) = -\sin \text{am}\, u \quad (7)$$

ce qui étant donné la valeur de la fonction au point P_1 fait connaître sa valeur au point P_1' symétrique de P_1 par rapport au centre du rectangle.

La relation

$$\sin \text{am}(2\omega + u) = -\sin \text{am}\, u$$

qui se déduit immédiatement des relations (1) et (7) permet encore d'avoir la valeur de la fonction aux points P_1'' et P_1''' obtenus en menant par les points P_1 et P_1' des parallèles à ox de longueur 2ω ou -2ω.

Définition de cos.am. u et de Δ.am. u.

A côté de la fonction sin. am. u. on étudie deux autres fonctions qui lui sont aussi intimement liées que le cosinus et la tangente au sinus en trigonométrie.

Ce sont les fonctions.

$$\cos.\,am.\,u = \sqrt{1-z^2}$$

et

$$\Delta\, am\, u = \sqrt{1-k^2 z^2}$$

ces équations ne définissent ces fonctions qu'au signe près mais leur signe est déterminé ainsi qu'il suit. si par une intégration entre 0 et z suivant un certain contour, on a obtenu pour l'intégrale une valeur déterminée u, les fonctions cos. am. u et Δ. am. u sont les radicaux qui figurent au dénominateur de la fonction à intégrer, pris avec le signe qu'ils ont en arrivant au point z dans l'intégration.

Il est immédiat que les deux fonctions que nous venons de définir sont des fonctions paires ; c'est-à-dire qu'elles ne changent pas lorsque l'on change u en $-u$ en effet pour obtenir deux valeurs de u égales et de signes contraires intégrons d'une part entre le point 0 et le point z suivant une certaine courbe d'autre part entre le point 0 et le point z' symétrique de z par rapport à l'origine (c'est-à-dire représentant l'imaginaire $-z$) suivant un chemin symétrique du précédent ; les deux intégrales obtenues sont évidemment égales et de signes contraires, quand aux radicaux ils ont dans les deux intégrations changé le même nombre de fois de signes, ils ont donc le même signe final et ils ont évidemment la même valeur absolue, ce sont d'ailleurs respectivement

$$\cos.\,am.\,u \text{ et } \cos.\,am.(-u)\,;\ \Delta\, am.\,u \text{ et } \Delta\, am.(-u)$$

Périodes de cos. am. u – Pour que cos. am. u puisse prendre deux valeurs égales, il faut que l'on conduise les intégrations le long de deux contours aboutissant soit au même point, soit en deux points symétriques par rapport à l'origine (puisque la valeur de cos. am. u ne contient que z^2) et après avoir tourné dans les deux cas un même nombre de fois autour de l'un ou l'autre des points critiques A ou A' pour lesquels le radical $\sqrt{1-z^2}$ change de signe.

En étudiant les diverses combinaisons de lacets qui réalisent ces conditions on constate que cos. am. u admet les deux périodes 4ω et $2\omega + 2\omega' i$.

En effet soit comme précédemment u la valeur de l'intégrale $\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$ prise suivant la droite oz.

Si maintenant nous effectuons l'intégration successivement le long des lacets tournant autour de A et de A' puis le long de oz, on sait que l'on obtient pour la valeur de l'intégrale $4\omega + u$; d'ailleurs le signe de $\sqrt{1-z^2}$ ayant changé deux fois est redevenu + comme dans l'intégration faite directement suivant o.z; on a donc

$$\cos am(4\omega + u) = \cos . am . u \quad (1)$$

Remarquons d'ailleurs que si l'on avait fait l'intégration suivant le lacet tournant autour de oA par exemple puis suivant oz le cosinus aurait changé de signe et l'on aurait obtenu la relation

$$\cos am(2\omega - u) = -\cos am\, u \quad (2)$$

on a encore

$$\cos am(2\omega + u) = -\cos am\, u \quad (3)$$

cette formule résulte soit de la transformation de la formule (2) en s'appuyant sur ce fait que la fonction cos. am. u est paire; soit encore de l'intégration faite suivant le lacet puis suivant oz', z' étant le symétrique de z par rapport à l'origine.

Nous trouverons la deuxième période en conduisant l'intégration suivant le contour $O\alpha\alpha'\beta\beta'\beta\alpha'\alpha OZ'$ car le résultat de l'intégration le long de ce contour est

$$u' = 2\omega + 2\omega' i + u$$

et le cosinus à la même valeur que dans le cas de l'intégration faite directement suivant OZ, car le contour d'intégration n'a tourné autour d'aucun des deux points A et A'; on a donc

$$\cos am(2\omega + 2\omega' i + u) = \cos . am . u \quad (4)$$

Si l'on avait conduit l'intégration suivant le contour $O\alpha\alpha'\beta\beta'\beta\alpha'\alpha OZ$ on serait arrivé à la formule

$$\cos am(2\omega + 2\omega' i - u) = \cos am . u \quad (5)$$

d'où l'on déduit immédiatement la formule (4) puisque cos am est une fonction paire.

Parallélogramme des périodes. - De même qu'avec les les deux périodes de sin. am. u nous avons formé un rectangle à l'intérieur duquel il suffit de connaître les valeurs de la fonction pour les connaître pour tout point du plan, nous pourrons pour cos am u former un parallélogramme jouissant des mêmes propriétés.

soit ABCO parallélogramme tel que $OA = 4\omega$ et $OC = 2\omega + 2\omega' i$ la connaissance de la valeur de la fonction pour un point tel que P, entraine la connaissance de celle-ci en tous les points correspondants des parallélogrammes successifs $ABFE$, $BCKH$.... etc. Il suffit même de connaître les valeurs de la fonction pour tous les points du parallélogramme construit sur les demi vecteurs OA et OC.

En effet de la formule (2) il résulte que les valeurs de la fonction aux points P et P_1 sont égales et de signes contraires, le vecteur PP_1 étant égal à 2ω) si maintenant je considère le point Q symétrique de P par

rapport à l'origine, la valeur de la fonction en ce point est la même qu'au point P ; elle sera encore la même au point obtenu en portant à partir de Q un vecteur égal à OB (P'_1 est alors symétrique de P' par rapport au point B'), enfin menant par P'_1 un vecteur égal à -2ω on obtient encore un point P' symétrique de P_1 par rapport au point B', où la valeur de la fonction est connue ; elle est égale et de signe contraire à la valeur de la fonction au point P.

Il suffit donc bien de connaître les valeurs de la fonction en tous les points du parallélogramme A' B' C' O pour la connaître en tous les points du plan.

Périodes de Δ am. u. Elles s'obtiendront exactement comme celles de cos. am. u.

Si l'on intègre suivant un lacet tournant autour du point A puis suivant OZ' il vient

$$\Delta . am . (2\omega + u) = \Delta . am . u \quad (1)$$

ce qui montre que 2ω est une des périodes de la fonction.

Si l'on intègre maintenant le long du contour

$0 \alpha \alpha' \beta \beta' \beta \alpha' \alpha . Z'$

il vient

$$\Delta \, am . (2\omega + 2\omega' i + u) = -\Delta \, am . u$$

ou en tenant compte de ce fait que 2ω est une période

$$\Delta . am . (2\omega' i + u) = -\Delta \, am . u \quad (2)$$

Si l'on intègre le long du contour

$0 \alpha \alpha' \beta \beta' \beta \alpha' \alpha \, 0 \, \gamma \gamma' \delta \delta' \delta \gamma' \gamma \, 0 \, z$

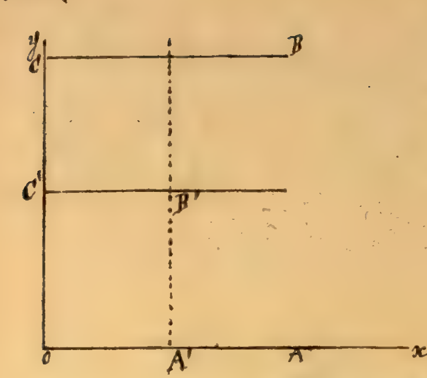
il vient

$$\Delta . am . (4\omega + 4\omega' i + u) = \Delta . am . u$$

ou en tenant compte de la période 2ω

$$\Delta . am . (4\omega' i + u) = \Delta . am . u \quad (3),$$

Les équations (1) et (3) indiquent les deux périodes élémentaires de la fonction Δ am. u celle-ci admet comme la fonction sin. am. u un rectangle des périodes de côtés 2ω et $4\omega' i$, dans l'intérieur duquel il suffira de connaître les valeurs de la



fonction ; il suffira même comme précédemment d'en connaître les valeurs à l'intérieur d'un rectangle de côtés moitié moindres A' B' C' O, en raison des 2 relations

$$\Delta \text{ am}(2\omega' i + u) = -\Delta \text{ am } u$$

$$\Delta \text{ am}(-u) = \Delta \text{ am } u$$

Propriétés générales des fonctions doublement-périodiques, systèmes de périodes équivalents.

Etant donné une fonction périodique admettant les deux périodes α et β, elle admet évidemment aussi comme période toute quantité de la forme.

$$m\alpha = n\beta$$

m et n étant deux entiers quelconques positifs ou négatifs.

Nous pouvons donc remplacer le système des périodes données α et β pour le système des deux périodes

$$\alpha' = m\alpha + n\beta$$

$$\beta' = m'\alpha + n'\beta$$

mais ce nouveau système n'est équivalent au précédent que si des périodes α' et β' on peut déduire α et β ; or en résolvant les deux équations précédentes il vient

$$\alpha = \frac{\beta' n - \alpha' n'}{m' n - m n'}$$

$$\beta = \frac{\alpha' m' - \beta' m}{m' n - m n'}$$

il faut et il suffit que les coefficients de α' et β' dans ces

deux formules soient entiers, c'est-à-dire (si l'on suppose les 4 entiers m, n, m', n' premiers entre eux dans leur ensemble) que l'on ait

$$mn' - m'n = \pm 1$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que les deux systèmes de périodes puissent se déduire l'un de l'autre c'est-à-dire soient équivalents.

Interprétation géométrique. – Cette condition a une interprétation géométrique très simple : elle exprime que les parallélogrammes des périodes sont équivalents dans les deux cas.

En effet si par l'origine nous menons les deux vecteurs

$$\alpha = a + bi$$

$$\beta = a' + b'i$$

l'aire du parallélogramme construit sur ces vecteurs est égale au déterminant

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

Considérons maintenant les deux périodes

$$\alpha' = m\alpha + n\beta = (ma + na') + i(mb + nb')$$

$$\beta' = m'\alpha + n'\beta = (m'a + n'a') + i(m'b + n'b')$$

l'aire du parallélogramme construit sur les 2 vecteurs A' et B' sera

$$\begin{vmatrix} m'a + na' & mb + nb' \\ m'a + n'a' & m'b + n'b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix}$$

la condition nécessaire et suffisante pour que cette aire soit égale à la précédente est évidemment

$$\begin{vmatrix} m & n \\ m' & n' \end{vmatrix} = \pm 1 \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Cette condition de l'équivalence des aires des parallélogrammes des périodes pour que les périodes soient équivalentes peut être énoncée ainsi :

Etant donné deux périodes ~~de~~ α et β et la valeur

de la fonction au point A, on peut, à partir de ce point couvrir le plan d'un réseau de parallélogrames en tous les sommets desquels la valeur de la fonction sera la même qu'en A; il est évident que la condition nécessaire et suffisante pour qu'un deuxième système de périodes, α' β', soit équivalent au précédent et que le réseau des parallélogrammes construit à partir du point A à l'aide de ces nouvelles périodes permette de retrouver tous les sommets du précédent et inversement.

Si l'on remarque que à chaque parallélogramme correspondent quatre sommets, et à chaque sommet correspondent quatre parallélogrames, on voit que cette condition peut encore se formuler ainsi : il faut et suffit qu'il y ait le même nombre de parallélogrammes de chaque réseau compris à l'intérieur d'un contour quelconque, mais suffisamment grand pour que l'ensemble des parallélogrammes coupés par le contour soit négligeable par rapport à l'ensemble des parallélogrammes intérieurs au contour.

Mais dans cette hypothèse la somme des aires des parallélogrammes intérieurs au contour est égale (à une fraction près de l'aire totale négligeable devant celle-ci), à l'aire comprise à l'intérieur du contour; comme il y a par hypothèse le même nombre de parallélogrammes des deux réseaux, ils ont même aire

C. Q. F. D

15e Leçon.

Propriétés des fonctions elliptiques - Formules d'addition.-

$$\sin.\mathrm{am}\,(\omega-u)=\frac{\cos.\mathrm{am}.\,u}{\Delta.\mathrm{am}.\,u}$$

A la formule de trigonométrie $\sin\left(\frac{\pi}{2}-u\right)=\cos.u$ correspond pour les fonctions elliptiques la formule

$$\sin.\mathrm{am}\,(\omega-u)=\frac{\cos.\mathrm{am}.\,u}{\Delta.\mathrm{am}.\,u}$$

Pour établir cette formule, je considère l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-k^2z^2}}$$

et j'y fais le changement de variables

$$y = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}}$$

De la formule de transformation on déduit successivement

$$z^2 = \frac{1-y^2}{1-k^2y^2}$$

$$dz = \frac{(k^2-1)\,y.\,dy\,\sqrt{1-k^2y^2}}{(1-k^2y^2)\,\sqrt{1-y^2}}$$

Il vient alors

$$u = \int_1^y \frac{(k^2-1)\,y\,dy\,\sqrt{1-k^2y^2}}{(1-k^2y^2)\,\sqrt{1-y^2}} \quad \frac{1-k^2y^2}{\sqrt{1-k^2y}\,\sqrt{1-k^2}}$$

ou, toutes réductions faites

$$u = -\int_1^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-k^2y^2}}$$

Cette équation s'écrit encore

$$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-k^2y^2}} - u = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-k^2y^2}}$$

Mais la première de ces intégrales est égale à ω, l'équation exprime donc que l'on a

$$\sin \operatorname{am}(\omega - u) = y$$

mais nous avons posé

$$y = \frac{\sqrt{1-z^2}}{\sqrt{1-k^2z^2}} = \frac{\cos.\operatorname{am}.u}{\Delta.\operatorname{am}.u}$$

Substituant il vient la relation à établir

$$\sin.\operatorname{am}.(\omega-u) = \frac{\cos.\operatorname{am}.u}{\Delta.\operatorname{am}.u}$$

Calcul de $\sin.\mathrm{am}\left(\frac{\omega}{2}\right)$

Si dans la formule précédente nous faisons $u = \frac{\omega}{2}$ il vient

$$\sin.\mathrm{am}\frac{\omega}{2} = \frac{\cos.\mathrm{am}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\Delta.\mathrm{am}.\left(\frac{\omega}{2}\right)}$$

ou en posant $\sin\mathrm{am}\frac{\omega}{2} = x$

$$x = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-K^2x^2}} \quad (1)$$

ou en élevant au carré et ordonnant

$$K^2x^4 - 2x^2 + 1 = 0 \quad (2)$$

C'est une équation du second degré en x^2; il y a une racine comprise entre 0 et 1 et une racine supérieure à 1, cette dernière est évidemment à rejeter car le sinus amplitude d'une quantité réelle est toujours réel et inférieur à 1, de plus $\sin\mathrm{am}\frac{\omega}{2}$ est évidemment positif ce qui définit complètement celle des quatre racines de l'équation (2) que nous devons prendre.

Nous trouvons en plus trois solutions étrangères, cela tient à ce fait qu'en écrivant l'équation (1) et l'élevant au carré nous avons seulement exprimé la condition.

$$\sin.\mathrm{am}.u = \pm\sin\mathrm{am}(\omega - u)$$

ce qui donne, en prenant le signe +,

$$u = \omega - u + 4n\omega + 2n'\omega' i$$

ou $\quad u = \frac{\omega}{2} + 2n\omega + n'\omega' i \quad (3)$

les solutions correspondantes au signe − se déduiront des précédentes en ajoutant ω.

La formule (3) donne comme solutions à l'intérieur du premier rectangle des périodes

$$u = \frac{\omega}{2} \qquad u = \frac{\omega}{2} + 2\omega$$

$$u = \frac{\omega}{2} + \omega' i \qquad u = \frac{\omega}{2} + \omega i + 2\omega$$

Aux deux premières solutions correspondent les deux racines de l'équation (2) dont la valeur absolue est plus petite que 1 et aux deux autres correspondent les deux autres racines.

Le produit des racines en x^2 de l'équation (2) étant égal à $\frac{1}{K^2}$, celui des racines positives en x sera $\frac{1}{K}$ on aura donc

$$\sin.\mathrm{am}\left(\frac{\omega}{2}\right)\sin\mathrm{am}\left(\frac{\omega}{2}+\omega' i\right)=\frac{1}{K}$$

Cette formule n'est d'ailleurs qu'un cas particulier de la formule

$$\sin\mathrm{am}(u).\sin\mathrm{am}(\omega' i+u)=\frac{1}{K}$$

$\sin\mathrm{am}(\omega' i)=\infty$. Avant d'établir cette formule nous démontrerons que $\sin.\mathrm{am}(\omega' i)$ est infini.

Pour cela je considère l'intégrale

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2z^2}}$$

et je la calcule entre 0 et ∞ en suivant l'axe des x, mais en évitant les deux points critiques A et B par deux demi-cercles de rayon infiniment petit ; c'est-à-dire que j'intègre le long du contour

$0\alpha m\alpha'\beta n\beta'\infty$

l'intégrale ainsi définie est

$$u=\int_{0A}+\int_{AB}+\int_{B\infty} \quad (1)$$

Mais $\int_{0A}=\omega$ et $\int_{AB}=\omega' i$

0 α A m α' β B n β' ∞

$$\int_{B\infty}=\int_{\frac{1}{K}}^{\infty}\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2z^2}}$$

Dans cette dernière intégrale je fais le changement de variable

$z=\frac{1}{Ky}$, elle devient

$$\int_1^{c} \frac{-dy}{ky^2\sqrt{1-\frac{1}{k^2y^2}}\sqrt{1-\frac{1}{y^2}}} = -\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = -\omega$$

Portant dans (1) il vient

$$u = \omega' i$$

mais par définition même de u, sin. am. (u) est égal à l'infini ; on a donc

$$\sin.\,am(\omega' i) = \infty \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Théorème – Le produit sin. am. $(\omega' i + u)$ sin. am. u est égal à $\frac{1}{k}$

En effet dans l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-k^2z^2}}$$

je fais le changement de variable

$$z = \frac{1}{ky}$$

il vient toutes réductions faites

$$u = -\int_y^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} = -\int_0^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}} + \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}$$

D'où on déduit immédiatement en vertu de la propriété précédente

$$u + \omega' i = \int_0^{y} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}$$

ou

$$y = \sin\,am(\omega' i + u)$$

c'est-à-dire encore

$$\sin.\,am.(\omega' i + u) = \frac{1}{k.\sin.\,am(u)} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Les deux relations précédemment établies ne sont évidemment qu'un cas particulier de celle ci lorsque l'on y fait soit $u = \frac{\omega}{2}$ soit $u = 0$.

On en déduit immédiatement la valeur de

$\sin . am . \left(\frac{\omega' i}{2}\right)$.

en effet eu égard à la période $2\omega' i$ de la fonction sinusamplitude la formule précédente peut s'écrire

$$\sin . am (u - \omega' i) . \sin . am (u) = \frac{1}{k}$$

D'ou en faisant $u = \frac{\omega' i}{2}$

$$\sin^2 am \left(\frac{\omega' i}{2}\right) = -\frac{1}{k}$$

cette équation qui admet les deux racines $\pm \frac{i}{\sqrt{k}}$ fait connaître les sinus amplitude d'une infinité d'arguments compris dans la formule

$$u = \frac{\omega' i}{2} + n\,\omega' i + 2\,m\,\omega.$$

On reconnait aisément que

$$\sin . am \left(\frac{\omega' i}{2}\right) = + \frac{i}{k}$$

Formule d'addition de sin.am(u) -

Soit les deux intégrales

$$u = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\,\sqrt{1-k^2x^2}}$$

$$v = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-k^2y^2}}$$

qui définissent les deux fonctions

$$x = \sin . am . u$$

$$y = \sin . am . v$$

proposons nous de chercher l'expression de $\sin \text{am}(u+v)$

Si nous supposons que l'on fasse varier x et y de manière que $(u+v)$ reste constant on aura la relation

$$du + dv = 0 \quad \text{ou} \quad du = -dv$$

Mais

$$du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}$$

$$\text{et} \quad dv = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2}}$$

On aura donc simultanément

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2} \\ \dfrac{dy}{dv} = \dfrac{-dy}{du} = \sqrt{1-y^2}\sqrt{1-k^2y^2} \end{cases}$$

ou

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dx}{du}\right)^2 = 1 - x^2(1+k^2) + k^2x^4 \\ \left(\dfrac{dy}{du}\right)^2 = 1 - y^2(1+k^2) + k^2y^4 \end{cases} \quad (1)$$

On en déduit en dérivant par rapport u

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{du^2} = -x(1+k^2) + 2k^2x^3 \\ \dfrac{d^2y}{du^2} = -y(1+k^2) + 2k^2y^3 \end{cases} \quad (2)$$

Multipliant la première de ces équations par y la deuxième par x et retranchant il vient

$$y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2} = 2k^2xy(x^2-y^2) \quad (3)$$

On déduit de même du système (1) l'équation

$$y^2\left(\frac{dx}{du}\right)^2 - x^2\left(\frac{dy}{du}\right)^2 = (x^2-y^2)(k^2x^2y^2-1).$$

équation qui s'écrit encore.

$$y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du} = \frac{(K^2x^2y^2-1)(x^2-y^2)}{y\frac{dx}{du}+x\frac{dy}{du}} \quad (4)$$

Divisant les équations (3) et (4) membres à membres il vient

$$\frac{y\frac{d^2x}{du^2} - x\frac{d^2y}{du^2}}{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}} = \frac{2K^2xy\left(y\frac{dx}{du}+x\frac{dy}{du}\right)}{K^2x^2y^2-1}$$

Le numérateur de chacune de ces fractions étant la dérivée du dénominateur l'intégration est immé-diate, il vient

$$L.\left(y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}\right) = L\,(K^2x^2y^2-1) + \text{constante}$$

ou encore

$$\frac{y\frac{dx}{du} - x\frac{dy}{du}}{1-K^2x^2y^2} = \text{constante}.$$

Si l'on remarque que

$$\frac{dx}{du} = \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2x^2} = \cos.\text{am}.u.\Delta.\text{am}.u.$$

$$\frac{dy}{du} = -\frac{dy}{dv} = -\cos.\text{am}.v.\Delta.\text{am}.v.$$

il vient

$$\frac{\sin.\text{am}.u.\cos.\text{am}.v.\Delta.\text{am}.v - \sin.\text{am}.v\cos.\text{am}.u\,\Delta.\text{am}.u}{1-K^2\sin^2.\text{am}.u.\sin^2\text{am}.v.}$$

$= \text{constante}$

Cette expression est constante en même temps que $(u+v)$ c'est donc une fonction de $(u+v)$; mais si l'on fait $v=0$ dans l'expression précédente elle se réduit à $\sin.\text{am}.u$, donc la fonction de $(u+v)$ qui figure au deuxième membre est $\sin.\text{am}.(u+v)$.

On a donc la formule

$$\sin.\text{am}.(u+v) = \frac{\sin.\text{am}.u.\cos.\text{am}.v\,\Delta.\text{am}.v - \sin.\text{am}.v.\cos.\text{am}.u.\Delta.\text{am}.u}{1-K^2\sin^2\text{am}.u\,\sin^2\text{am}.v.}$$

Formule d'addition de cos. am(u).

Pour calculer cos. am. $(u+v)$, il suffit de remarquer que l'on a

$$\cos^2 am (u+v) = 1 - \sin^2 am . (u+v)$$

c'est-à-dire en substituant

$$\cos^2 am . (u+v) = \frac{(1-k^2 \sin^2 am . u \sin^2 am\, v)^2 - (\sin . am . u . \cos . am\, v \Delta am . v + \sin . am . v \cos . am . u \Delta am\, u)^2}{(1-k^2 \sin^2 am . u . \sin^2 am\, v)^2}$$

Mais on a identiquement

$$1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v = \cos^2 am\, u + \sin^2 am\, u\, \Delta^2 am\, v$$
$$= \cos^2 am\, v + \sin^2 am\, v\, \Delta^2 am\, u$$

Remplaçant au numérateur $(1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2$ par le produit de ces expressions il vient, toutes réductions faites.

$$\cos^2 am (u+v) = \frac{(\cos . am . u . \cos . am . v - \sin . am . u \Delta am . u . \sin . am . v \Delta am\, v)^2}{(1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2}$$

Extrayant la racine carrée des deux membres on obtient l'expression de cos. am $(u+v)$, mais le signe est indéterminé ; on le détermine immédiatement en remarquant que si l'on fait $v=0$ dans le deuxième membre celui-ci doit se réduire à + cos.am.u.

Il vient ainsi.

$$\cos . am . (u+v) = \frac{\cos . am . u \cos am\, v - \sin . am . u . \sin . am . v \Delta am\, u \Delta am\, v}{1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}$$

Formule d'addition de Δ.am.u.

Pour obtenir l'expression de Δ. am. $(u+v)$ nous conduirons le calcul comme pour le cosinus. On a

$$\Delta^2 am (u+v) = 1 - k^2 \sin^2 am (u+v)$$

$$= \frac{(1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2 - k^2 (\sin am\, u \cos am\, v \Delta am\, v - \sin am\, v \cos am\, u \Delta am\, u)^2}{(1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2}$$

Mais on a identiquement

$$1 - k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v = \Delta^2 am\, u + k^2 \sin^2 am\, u \cos^2 am\, v$$
$$= \Delta^2 am\, v + k^2 \sin^2 am\, v \cos^2 am\, u$$

Remplaçant $(1-k^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2$ par le produit

de ces deux expressions il vient toutes réductions faites

$$\Delta^2 am(u+v) = \frac{(\Delta am\, u\, \Delta am\, v - K^2 \sin am\, u \sin am\, v \cos am\, u \cos am\, v)^2}{(1 - K^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v)^2}$$

Extrayant la racine carrée des deux membres et choisissant le signe comme précédemment il vient

$$\Delta am(u+v) = \frac{\Delta am\, u\, \Delta am\, v - K^2 \sin am\, u \sin am\, v \cos am\, u \cos am\, v}{1 - K^2 \sin^2 am\, u \sin^2 am\, v}$$

Lignes de $(x+yi)$.-

Ces formules que nous venons d'établir permettent immédiatement de calculer les lignes de l'argument $u=(x+yi)$ en fonction des lignes des arguments x et yi, et d'en connaître les parties réelles et imaginaires.-

En effet la discussion des variations de sin am(u) cos am(u) et Δ am (u) fait voir que le sinus est réel et plus petit que 1 lorsque l'argument est réel, et qu'il est une imaginaire pure quand l'argument est une imaginaire pure; que le cosinus est réel et plus petit que 1 lorsque l'argument est réel, et qu'il est réel et nécessairement plus grand que 1 lorsque l'argument est une imaginaire pure.-
que le Δ est comme le cosinus réel et plus petit que 1 si l'argument est réel, et qu'il est réel et nécessairement plus grand que 1 lorsque l'argument est une imaginaire pure.

Ces remarques nous permettront de trouver rigoureusement tous les zéros et tous les infinis de ces trois fonctions.

16e Leçon.

Etude des zéros et des infinis des fonctions elliptiques : division des arguments par deux.

Zéros de sin. am. u.-

Il résulte immédiatement de la formule d'addition

des sinus amplitude que si u est une imaginaire de la forme $(x+yi)$ on a

$$\sin am\, u = \frac{\sin am\, x \cos am\, yi\, \Delta am\, yi + \sin . am . y.i . \cos . am . x\, \Delta am . x}{1 - k^2 \sin^2 am\, x \sin^2 am\, yi}$$

D'après ce que nous avons dit à la fin de la dernière leçon le dénominateur est réel et la seule expression imaginaire du numérateur est $\sin . am . y . i$ qui est une imaginaire pure. Donc (en écartant le cas où le dénominateur serait infini) la condition nécessaire et suffisante pour que $\sin . am . u .$ soit nul, est que l'on ait simultanément.

$$\sin . am . x . \cos . am . y . i\, \Delta am . y . i = 0 \quad (1)$$

$$\sin . am . y . i . \cos . am . x . \Delta am . x . = 0 \quad (2)$$

Mais deux des facteurs du premier membre de l'équation (1) sont toujours plus grands que (1) il faut donc que le troisième soit nul, c'est-à-dire que l'on ait

$$\sin . am . x . = 0 . (3)$$

Mais alors $\cos . am . x .$ et $\Delta am . x .$ sont tous deux égaux à l'unité, l'équation (2) exige donc que l'on ait en même temps

$$\sin . am . y . i = 0 \quad (4)$$

La discussion des valeurs de la fonction $\sin . am\, u$ montre que la première de ces équations équivaut à

$$x = 2 m \omega$$

et la deuxième à

$$y = 2 n \omega' i$$

Ces deux formules définissent tous les zéros de la fonction $\sin . am . u .$; à l'intérieur ou sur les côtés du rectangle des périodes on en aura 6 définis par les formules

$$u = 0 \qquad u = 2\omega \qquad u = 4\omega$$

$$u = 2\omega' i \quad u = 2\omega + 2\omega' i \quad u = 4\omega + 2\omega' i$$

Ces zéros correspondent aux 4 sommets du rectangle des périodes et au milieu de deux de ses côtés; il est d'ailleurs immédiat que tout rectangle des périodes dont les côtés ne passent par aucun zéro en contient deux et deux seulement.

Pour que ces résultats soient complètement justifiés il faut encore constater que lorsque le dénominateur devient infini la fraction ne s'annule pas; en effet le dénominateur ne devient infini que si les lignes de l'argument yi le deviennent mais alors ou bien $\sin . am . x$ est différent de 0 et la fraction a même limite

que le rapport des termes principaux

$$-\frac{1}{K^2 \sin . am . x} \times \frac{\cos am\, yi\, \Delta am\, yi}{\sin^2 am\, yi}$$

or si l'on remplace cos am yi et Δ am yi par leurs valeurs en fonction de sin. am. y.i. on voit que ce rapport tend vers $\frac{1}{K . \sin . am . x}$ ou bien enfin sin. am. x est nul et alors la fraction augmente indéfiniment avec sin. am. y.i.

Infinis de sin. am. u.

Le dénominateur de l'expression de sin. am. u. est toujours positif puisque le terme soustractif contient des facteurs toujours positifs et le carré d'une imaginaire pure ; la fraction ne peut donc augmenter indéfiniment que si l'une des expressions du numérateur augmente indéfiniment, c'est le cas que nous venons de discuter ; nous avons vu que sin. am. u. n'est infini que si l'on a à la fois

$$\sin . am . x = 0$$
$$\sin . am . yi = \infty$$

Ces équations équivalent à

$$x = 2 m \omega .$$
$$y = (2n+1)\omega' i$$

elles font voir qu'il y a trois infinis à l'intérieur du rectangle des périodes ou sur ses côtés ce sont les points qui correspondent aux valeurs.

$u = \omega' i \quad u = \omega' i + 2\omega \quad u = \omega' i + 4\omega .$

Il est évident que tout rectangle dont les côtés ne passent par aucun infini en contient deux.

La figure ci-contre indique par des 0 les zéros et par des × les infinis de sin. am. u relatifs au rectangle des périodes.

Les infinis de sin. am. u peuvent encore être recherchés en remarquant que toutes les fois que sin. am. u est infini, sin. am. 2u est nul; en effet la formule d'addition donne

$$\sin \mathrm{am}\, 2u = \frac{2 \sin.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.u.\Delta.\mathrm{am}.u}{1 - K^2 \sin^4 \mathrm{am}.u}$$

Il est évident que si sin. am. u est infini sin. am. 2u est nul car les trois fonctions sin. am. u, cos. am. u et Δ am. u sont infinies en même temps et du même ordre (c'est-à-dire que le quotient de deux quelconques d'entre elles reste fini); la réciproque n'est d'ailleurs pas exacte.

Il suit de là que pour que sin. am. u soit infini il faut que l'on ait

$$2u = 2m\omega + 2n\omega' i$$

ou $\quad u = m\omega + n\omega' i$

Toutes les solutions répondant aux valeurs paires de n sont à écarter car

$$\sin \mathrm{am}(m\omega + 2p\omega' i) = \sin \mathrm{am}(m\omega)$$

et que le sinus amplitude d'un arc réel est toujours fini; il faut donc faire $n = (2p+1)$ mais

$$\sin \mathrm{am}\left[m\omega + (2p+1)\omega' i\right] = \frac{1}{K.\sin.\mathrm{am}(m\omega)}$$

ceci n'est infini que si sin. am $(m\omega)$ est nul, c'est-à-dire si m est pair.

Tous les infinis sont donc compris dans la formule

$$u = 2q\omega + (2p+1)\omega' i.$$

Zéros et infinis de cos am (u)

Nous emploierons la même méthode pour rechercher les zéros et les infinis de cos am u que pour ceux de sin. am. u

On a

$$\cos \mathrm{am}(x+yi) = \frac{\cos.\mathrm{am}.x.\cos.\mathrm{am}.y.i - \sin.\mathrm{am}.x.\sin.\mathrm{am}.y.i\,\Delta \mathrm{am}.x.\Delta \mathrm{am}.y.i}{1 - K^2 \sin^2 \mathrm{am}.x.\sin^2 \mathrm{am}\, yi}$$

Annulant les parties réelles et imaginaires du 2e membre il vient

$$\cos.\mathrm{am}.x.\cos.\mathrm{am}.y\,i = 0$$

$$\sin.\mathrm{am}.x.\sin.\mathrm{am}.y.i\,\Delta \mathrm{am}.x.\Delta \mathrm{am}.y\,i = 0.$$

La 1ère équation exige

$$\cos.\mathrm{am}.\, x = 0$$

c'est-à-dire

$$x = \omega + 2m\omega.$$

Si cette équation est satisfaite la deuxième entraîne

$$\sin.\mathrm{am}.\, y.i = 0$$

ou $\quad yi = 2n\omega' i$

Tous les zéros de cos. am. u. sont donc compris dans la formule

$$u = \omega + 2m\omega + 2n\omega' i$$

A l'intérieur ou sur les côtés du parallélogramme des périodes on a les 4 zéros

$$u = \omega \qquad u = 3\omega$$

$$u = 3\omega + 2\omega' i \qquad u = 5\omega + 2\omega' i$$

à l'intérieur d'un parallélogramme des périodes dont les côtés ne passent par aucun zéro, il y a évidemment deux zéros.

Nous avons négligé d'examiner le cas où le dénominateur devient infini, il faut pour cela que l'on ait simultanément

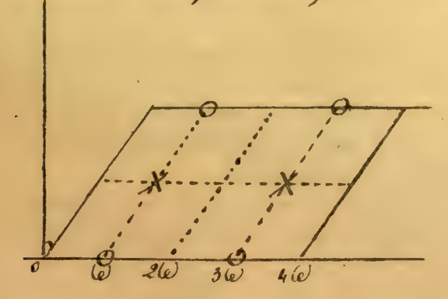
$$\sin.\mathrm{am}.\, yi = \infty$$

$$\sin.\mathrm{am}.\, x \neq 0.$$

Dans ce cas cos. am. u. reste fini et différent de 0

Pour qu'il devienne infini il faut que les lignes de yi soient infinies et que sin. am. x soit nul ; ce sont les mêmes conditions que pour que le sinus amplitude devienne infini ce qui était évident à priori puisque

$$\sin.\mathrm{am}.u = \sqrt{1 - \cos^2 \mathrm{am}\, u}$$



On a donc à l'intérieur du parallélogramme des périodes les deux infinis

$$u = 2\omega + \omega' i$$

$$u = 4\omega + \omega' i$$

La figure ci-contre représente les zéros et les infinis de la fonction cos. am. u relatifs au parallélogramme des périodes.

Zéros et infinis de Δ am u :-

On a

$$\Delta\mathrm{am}.(x+yi) = \frac{\Delta\mathrm{am}.x.\Delta\mathrm{am}.y.i - K^2 \sin.\mathrm{am}.x.\sin.\mathrm{am}.y.i.\cos.\mathrm{am}.x\cos\mathrm{am}\,yi}{1 - K^2 \sin^2 \mathrm{am}.x.\sin^2 \mathrm{am}\, yi}.$$

La partie réelle du numérateur, $\Delta \text{am}.x.\Delta \text{am}.y.i$, n'est jamais nulle. (Car nous supposons toujours le module K inférieur à l'unité); donc la fraction ne peut s'annuler que si les lignes de yi deviennent infinies dans ce cas la fraction reste finie sauf si en même temps sin. am. x. ou cos. am. x deviennent nuls, dans le premier cas Δ est infini, dans le deuxième il est nul.

Il résulte donc de là que les zéros de la fonction sont donnés par les deux formules

$$\sin.\text{am}.y.i = \infty$$
$$\cos.\text{am}.x. = 0$$

ou $\quad yi = (2n+1)\,\omega' i$

et $\quad x = (2m+1)\,\omega.$

ce qui donne dans le rectangle des périodes les deux points

$$u = \omega + \omega' i \qquad\qquad u = \omega + 3\omega' i$$

Il y a deux zéros à l'intérieur de tout rectangle des périodes.

Le dénominateur de Δ ne pouvant s'annuler il résulte de la discussion précédente que les infinis sont donnés par les deux formules

$$\sin.\text{am}.y.i = \infty$$
$$\sin.\text{am}.x = 0$$

ou $\quad y.i. = (2n+1)\,\omega' i$

et $\quad x = 2m\omega.$

ce qui donne pour le rectangle des périodes les quatre points

$$u = \omega' i \qquad\qquad u = 3\omega' i$$
$$u = 2\omega + \omega' i \qquad\qquad u = 2\omega + 3\omega' i$$

Comme cela était évident ce sont aussi les infinis de sin. am. u.

Il n'y aurait que deux infinis à l'intérieur d'un rectangle des périodes ne passant par aucun infini.

La figure ci-contre représente les zéros et les infinis relatifs au rectangle des périodes.

Dérivées des fonctions elliptiques.

De la définition même de la fonction sin. am. u il résulte que l'on a

$$\frac{d.\sin.\text{am}.u}{du} = \sqrt{1-Z^2}\,\sqrt{1-K^2 Z^2} = \cos.\text{am}.u.\,\Delta\text{am}.u.$$

De la relation

$$\cos^2 am.u. + \sin^2 am.u = 1$$

il résulte que l'on a en dérivant

$$\cos.am.u \frac{d.\cos.am.u}{du} + \sin.am.u. \frac{d.\sin.am.u}{du} = 0$$

d'où

$$\frac{d.\cos.am.u}{du} = -\sin.am.u.\Delta am\, u$$

Enfin de la relation

$$K^2 \sin^2 am.u + \Delta^2 am\, u = 1$$

on déduit

$$\frac{d.\Delta.am.u}{du} = -K^2 \frac{d.\sin.am.u}{du} \frac{\sin.am.u}{\Delta am.u} = -K^2 \sin.am.u.\cos.am.u.$$

Les zéros et les infinis des fonctions elliptiques sont simples.

On dit que $z = \alpha$ est un zéro simple de la fonction $f(z)$ lorsque pour $z = \alpha$ la fonction s'annule, et lorsque le quotient $\frac{f(z)}{z-\alpha}$ reste fini et différent de 0; ce qui revient à dire que la dérivée $f'(\alpha)$ n'est ni nulle ni infinie

Il est dès lors immédiat que tous les zéros des trois fonctions elliptiques sont simples; en effet la dérivée de chacune d'elles est à un facteur constant près égale au produit des 2 autres, et l'on sait que lorsque l'une des fonctions est nulle les deux autres sont nécessairement différentes de zéro On dit que $z = \alpha$ est un infini simple de la fonction $f(z)$ lorsque $f(z)$ est infini pour $z = \alpha$ et que le produit $(z-\alpha) f(z)$ reste fini et différent de 0 – Ce produit étant égal à $\frac{z-\alpha}{\frac{1}{f(z)}}$ dont la limite est (d'après la règle de l'Hospital) $-\frac{f'(z)}{[f(z)]^2}$, cela revient à dire que ce dernier quotient a une limite qui n'est ni nulle ni infinie.

Tous les infinis des fonctions elliptiques sont simples; en effet lorsque l'une de ces trois fonctions est infinie les deux autres le sont en même temps, mais leur quotient deux à deux est fini et différent de 0 ; alors le quotient $\frac{f'(z)}{[f(z)]^2}$ l'est aussi car il contient deux de ces fonctions au numérateur comme au dénominateur.

Applications.- Nous avons démontré précédemment la formule

$$\sin.\mathrm{am}(\omega-u)=\frac{\cos.\mathrm{am}.u}{\Delta.\mathrm{am}.u}$$

On peut la retrouver ainsi qu'il suit, je considère la fonction

$$\frac{\sin.\mathrm{am}.(\omega-u)\,\Delta\mathrm{am}.u}{\cos.\mathrm{am}.u}$$

Il est immédiat qu'elle ne devient infinie pour aucune valeur de la variable; en effet si nous essayons d'abord les valeurs qui rendent infini Δ am.u, elles rendent cos. am.u infini du même ordre et sin am$(\omega-u)$ reste fini, la fonction reste donc finie ; lorsque sin. am$(\omega-u)$ est infini, Δ.am.u est nul et cos. am.u reste fini et différent de 0 la fonction reste donc encore finie (nous admettons ici que le produit sin. am.$(\omega-u)\Delta$.am.u reste fini ; en effet soit α la valeur considérée de u, sin.am$(\omega-u)$ est comme on l'a vu comparable à $\frac{1}{u-\alpha}$ et Δam u à $u-\alpha$ leur produit reste donc bien fini) ; enfin lorsque cos. am.u est nul, sin. am.$(\omega-u)$ l'est en même temps et le quotient reste encore fini.

Donc la fonction considérée reste finie dans tout le plan, elle est d'ailleurs bien déterminée en tout point donc d'après un théorème connu elle est constante, sa valeur constante est d'ailleurs égale à l'unité comme on le reconnait en faisant $u=2\omega$

On peut établir de même la formule

$$\sin.\mathrm{am}.\omega\,\sin.\mathrm{am}.(u+\omega'i)=\frac{1}{k}$$

En effet la fonction du premier membre ne devient jamais infinie car lorsque l'un des deux facteurs est nul, l'autre est infini et réciproquement et leur produit reste fini; donc cette fonction est constante puisqu'elle reste finie et déterminée en tout point du plan; pour trouver sa valeur constante je fais $u = \omega$; il vient alors

$$\sin.\mathrm{am}.(\omega)\sin.\mathrm{am}.(\omega+\omega' i) = 1 \times \frac{1}{K}$$

Cette valeur constante est donc $\frac{1}{K}$ C. Q. F. D.

Résolution de l'équation sin. am. u = sin. am. a

Proposons nous étant donné le sinus amplitude d'un argument a de trouver toutes les valeurs de l'argument répondant à cette valeur du sinus amplitude.

Nous savons déjà que si a est l'une des solutions, tous les arguments compris dans l'une des deux formules

$$u = a + 4m\omega + 2n\omega' i$$

$$u = (2\omega - a) + 4m\omega + 2n\omega' i$$

satisfont au problème; ces solutions ont été obtenues par les intégrations suivant différents contours, et la discussion de ces intégrations pourrait montrer que ce sont là toutes les solutions — On peut arriver au même résultat ainsi qu'il suit; des formules d'addition on déduit

$$\sin.\mathrm{am}.(u+v) = \frac{\sin.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.v.\Delta\mathrm{am}.v + \sin.\mathrm{am}.v.\cos.\mathrm{am}.u.\Delta\mathrm{am}.u}{1-K^2.\sin^2.\mathrm{am}.u.\sin^2.\mathrm{am}.v.}$$

$$\sin.\mathrm{am}(u-v) = \frac{\sin.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.v.\Delta\mathrm{am}.v. - \sin.\mathrm{am}.v.\cos.\mathrm{am}.u.\Delta\mathrm{am}.u}{1-K^2.\sin^2.\mathrm{am}.u.\sin^2.\mathrm{am}.v.}$$

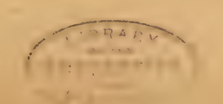
D'ou en retranchant et posant

$$u + v = p$$

$$(u - v) = q$$

$$\sin.\mathrm{am}.p - \sin.\mathrm{am}.q = \frac{2\sin.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}.\cos.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}\,\Delta.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}}{1-K^2.\sin^2.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}.\sin^2.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}}$$

Pour que sin. am. p. soit égal à sin. am. q., il faut et suffit que le 2e membre soit nul ce qui se produit



dans les 4 cas suivants

$$\sin.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}=0$$

$$\cos.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}=0$$

$$\Delta.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}=0$$

$$\sin.\mathrm{am}\frac{p-q}{2}=\infty$$

Ces équations équivalent respectivement aux suivantes

$$\frac{p-q}{2}=2m\omega+2n\omega' i$$

$$\frac{p+q}{2}=(2m+1)\omega+2n\omega' i$$

$$\frac{p+q}{2}=(2m+1)\omega+(2n+1)\omega' i$$

$$\frac{p-q}{2}=2m\omega+(2n+1)\omega' i$$

Ces formules expriment ou bien que la différence $p-q$ est une combinaison linéaire des deux périodes, ou que la somme $p+q$ est égale à 2ω augmenté d'une combinaison des deux périodes ; on retrouve ainsi les résultats connus

---

Résolution de l'équation $\cos.\mathrm{am}.u=\cos\mathrm{am}\,a$

La méthode est la même que précédemment ; de la formule d'addition du cosinus on déduit

$$\cos.\mathrm{am}.q.-\cos.\mathrm{am}.p=\frac{2\sin.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}\sin.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}\,\Delta\mathrm{am}\frac{p+q}{2}\,\Delta\mathrm{am}\frac{p-q}{2}}{1-k^2\sin^2\mathrm{am}\frac{p+q}{2}\sin^2\mathrm{am}\frac{p-q}{2}}$$

Cette différence pourra être nulle si l'on a

$$\sin.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}=0$$

$$\sin.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}=0$$

$$\Delta.\mathrm{am}.\frac{p+q}{2}=0$$

$$\Delta.\mathrm{am}.\frac{p-q}{2}=0$$

ce qui équivaut pour $(p+q)$ à

$$\frac{p+q}{2} = 2m\omega + 2n\omega' i \text{ ou } p+q = (2m+1)\omega + (2n+1)\omega' i$$

c'est-à-dire $p+q = 4m\omega + n(2\omega + 2\omega' i)$

On trouverait exactement les mêmes valeurs pour $p-q$ (ce qui tient à ce que cos. am. u. est une fonction paire)

Donc pour que deux cosinus amplitude soient égaux il faut et suffit que la somme ou la différence des arguments soit égale à une combinaison des périodes du cosinus.

Si l'on résout l'équation $\Delta.\text{am}.u = \Delta.\text{am}.a$ on trouve de même que la différence ou la somme des arguments doit être égale à une combinaison des périodes : $2m\omega + 4n\omega' i$.

Ces deux derniers résultats étaient évidents à priori les fonctions cosinus et Δ étant paires on devait trouver la même condition pour la somme et pour la différence ; or la condition relative à la différence est évidemment que celle-ci soit une combinaison linéaire des périodes.

Division des arguments par deux.

Proposons nous, étant donné sin. am. u de calculer sin. am. $\frac{u}{2}$; la formule d'addition des sinus donne immédiatement l'équation

$$\sin.\text{am}.u = \frac{2\sin.\text{am}.\frac{u}{2}\cos.\text{am}.\frac{u}{2}\,\Delta\text{am}\frac{u}{2}}{1-k^2\sin^4\text{am}.\frac{u}{2}}$$

Posant $\sin.\text{am}.\frac{u}{2} = x$, il vient

$$\sin.\text{am}.u = \frac{2x\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-k^2x^2}}{1-k^2x^4}$$

ou en ordonnant après avoir élevé au carré

$$x^8(k^4\sin^2\text{am}\,u) - 4k^2x^6 + x^4(4k^2+4-2k^2\sin^2.\text{am}.u) - 4x^2 + \sin^2\text{am}\,u = 0$$

Cette équation est du huitième degré, elle se ramène immédiatement au 4e en prenant pour inconnue x^2, et si l'on remarque que le produit des racines de cette nouvelle équation prises deux à deux est $\frac{1}{k^2}$, on

peut ramener l'équation au 2e degré en prenant comme inconnue $x^2 + \frac{1}{K^2x^2}$, cette équation peut donc être entièrement résolue par des radicaux du 2e degré ses racines sont deux à deux égales et de signes contraires et ont deux à deux pour produit $\frac{1}{K}$

Toutes ces particularités peuvent être aperçues à priori si l'on remarque que lorsque l'on donne sin. am. u, l'argument u n'est pas complètement déterminé, si a est l'une de ses valeurs il est compris dans l'une des formules

$u = a + 4m\omega + 2n\omega' i$

$u = (2\omega - a) + 4m\omega + 2n\omega' i$

On a donc par suite pour $\frac{u}{2}$ les valeurs comprises dans les formules

$$\frac{u}{2} = \frac{a}{2} + 2m\omega + n\omega' i$$

$$\frac{u}{2} = \omega - \frac{a}{2} + 2m\omega + n\omega' i$$

A ces valeurs de u correspondent 8 sinus amplitude différents, ce sont ceux des arguments

$$\frac{a}{2} \quad \frac{a}{2} + 2\omega \quad \frac{a}{2} + \omega' i \quad \frac{a}{2} + 2\omega + \omega' i$$

$$\omega - \frac{a}{2} \quad 3\omega - \frac{a}{2} \quad \omega + \omega' i - \frac{a}{2} \quad 3\omega + \omega' i + \frac{a}{2}$$

Les sinus amplitude de ces arguments sont deux à deux égaux et de signe contraire puisque ceux-ci diffèrent deux à deux de 2ω; ils ont aussi deux à deux pour produit $\frac{1}{K}$ puisque les arguments diffèrent deux à deux de $\omega' i$.

Cette équation du 8e degré qui donne sin. am. $\frac{u}{2}$ peut être immédiatement séparée en deux autres du 4e degré chacune, de la manière suivante.

De l'équation

$\sin^2 \text{am. } u (1 - K^2x^4)^2 = 4x^2(1-x^2)(1-K^2x^2)$

on peut déduire l'équation équivalente

$(1 - \sin^2 \text{am } u)(1-K^2x^4)^2 = (1-K^2x^4)^2 - 4x^2(1-x^2)(1-K^2x^2)$

Le second membre est comme il est facile de le constater un carré parfait; il vient alors en prenant

les racines des deux membres

$$\pm\sqrt{1-\sin^2 am u}\,(1-K^2x^4)=(1-2x^2+K^2x^4)$$

On a donc bien deux équations bi-carrées pour déterminer x ; cela tient à ce que nous avons en somme pris comme donnée cos. am. u, et à tous les arguments répondant à un même sinus correspondent 2 cosinus égaux et de signe contraire la première des deux équations correspond au cas où le sinus est positif, la deuxième au cas où il est négatif.

17ᵉ Leçon.

Division des arguments par trois
Théorème de Poncelet

Calcul de sin. am. $\frac{u}{3}$. —

Etant donné sin. am. u, on pourra immédiatement calculer sin. am $\frac{u}{3}$; il suffit pour cela de faire la somme sin. am $\left(\frac{u}{3}+\frac{2u}{3}\right)$ et d'exprimer toutes les lignes du $\frac{u}{3}$ et de $\frac{2u}{3}$ en fonction de sin am $\frac{u}{3}$ que nous désignerons par x, il vient ainsi une équation du neuvième degré en x.

Ce résultat est facile à prévoir ; en effet en donnant sin. am. u on donne une infinité d'arguments compris dans l'une des deux formules.

$$u=a+4m\omega+2n\omega' i$$
$$u=(2\omega-a)+4m\omega+2n\omega' i$$

Il y a par suite aussi pour $\frac{u}{3}$ une double infinité de valeurs comprises dans les deux formules

$$\frac{u}{3} = \frac{a}{3} + \frac{4}{3} m\omega + \frac{2}{3} n\omega' i$$
$$\frac{u}{3} = \frac{2\omega}{3} - \frac{a}{3} + \frac{4}{3} m\omega + \frac{2}{3} n\omega' i$$

à chacune de ces séries d'arguments correspondent 9 sinus différents ; ce sont pour la 1ère (en prenant les plus petites valeurs positives pour les coefficients m et n)

$\frac{a}{3}$	$\frac{a}{3}+\frac{4}{3}\omega$	$\frac{a}{3}+\frac{8}{3}\omega$
$\frac{a}{3}+\frac{2}{3}\omega' i$	$\frac{a}{3}+\frac{4}{3}\omega+\frac{2}{3}\omega' i$	$\frac{a}{3}+\frac{8}{3}\omega+\frac{2}{3}\omega' i$
$\frac{a}{3}+\frac{4}{3}\omega' i$	$\frac{a}{3}+\frac{4}{3}\omega+\frac{4}{3}\omega' i$	$\frac{a}{3}+\frac{8}{3}\omega+\frac{4}{3}\omega' i$

Les arguments correspondant à la deuxième formule sont respectivement égaux à $\frac{2}{3}\omega$ diminué des arguments qui précèdent ; en retranchant ces nouveaux arguments de 2ω ce qui n'altère pas le sinus on retrouve les arguments du tableau précédent ; il y a donc bien neuf valeurs et neuf seulement pour sin. am $\frac{u}{3}$

Expression de cos. am. (u+v) et de cos am (u-v)

Des formules d'addition des fonctions elliptiques on déduit immédiatement la suivante

$$\cos.\mathrm{am}.(u+v) = \cos.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.v - \sin.\mathrm{am}.u.\sin.\mathrm{am}.v\,\Delta.\mathrm{am}(u+v)$$

On vérifie immédiatement l'exactitude de cette formule, en y remplaçant cos am (u+v) et Δ am (u+v) par leurs valeurs en fonction des lignes de u et de v, les deux membres deviennent alors identiques.

Changeant v en −v dans la formule précédente il vient

$$\cos.\mathrm{am}.(u-v) = \cos.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.v + \sin.\mathrm{am}.u.\sin.\mathrm{am}.v\,\Delta\,\mathrm{am}(u-v)$$

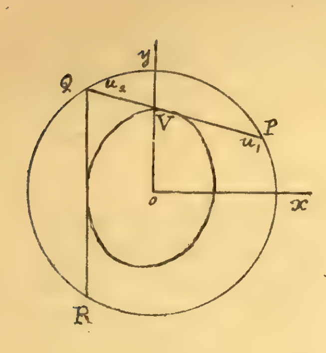
Théorème de Poncelet.

Etant donné deux coniques C C' s'il existe un polygone de n côtés inscrit dans la conique C et circonscrit à la conique C', il en existe une infinité et l'on peut prendre arbitrairement un sommet en un point quelconque de C — Ce théorème célèbre a été démontré par Euler pour le cas où n = 3.4, ou 5, il a été généralisé par Poncelet — Jacobi en a donné une

démonstration générale à l'aide des fonctions elliptiques. Nous le démontrerons d'abord dans le cas où les deux coniques C et C' sont un cercle et une ellipse concentriques puis dans le cas où ce sont deux cercles quelconques; ce dernier cas particulier démontre immédiatement la propriété dans le cas général puisque celle-ci est projective et que l'on peut toujours projeter deux coniques quelconques sur un même plan suivant deux cercles

---

Cas d'un cercle et d'une ellipse concentriques.



Si je rapporte les deux courbes aux axes de l'ellipse, elles auront respectivement pour équations

$x^2 + y^2 = R^2$

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

On peut satisfaire à ces équations en posant

$x = R \cos.\mathrm{am}.\, u$

$y = R \sin.\mathrm{am}.\, u$

pour le cercle et

$x = b \cos.\mathrm{am}.\, v$

$y = a \sin.\mathrm{am}.\, v.$

pour l'ellipse, u et v représentant des arguments réels.

L'équation de la tangente en un point de coordonnées $x . y$ à l'ellipse est

$$\frac{Xx}{b^2} + \frac{Yy}{a^2} = 1$$

je remplace x et y en fonction de v puis X et Y par $R \cos.\mathrm{am}.u$, et $R \sin.\mathrm{am}.u$, j'obtiendrai alors une équation qui définira en fonction de v, les arguments u_1, u_2 des points de rencontre de la tangente considérée avec le cercle; cette équation est

$$\frac{R}{b} \cos.\mathrm{am}.u.\cos.\mathrm{am}.v + \frac{R}{a} \sin.\mathrm{am}.u.\sin.\mathrm{am}.v = 1$$

Mais s'il existe un argument b tel que l'on ait

$\Delta \mathrm{am}\, b = \frac{b}{a}$

et $\cos am\, b = \frac{b}{R}$

cette dernière équation exprime que l'on a

$$b = \pm (u - V)$$

à un multiple près de la période 4ω (multiple que nous négligerons puisque lorsque l'on augmente u ou V de 4ω on retombe sur le même point)

Les valeurs de u répondant aux deux points d'intersection de la tangente considérée avec la circonférence sont donc

$$u_1 = V + b$$

$$u_2 = V - b$$

leur différence est égale à $2b$

Si donc en partant d'un point P de la circonférence défini par l'argument u, on mène une tangente PQ_1 à l'ellipse coupant la circonférence en Q_1, puis par le point Q_1 une tangente Q_1R et ainsi de suite les arguments des points successifs sur la circonférence seront

$$u_1,\ u_1 + 2b,\ u_1 + 4b \text{ —— } u_1 + 2nb$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le polygone ainsi formé qui est inscrit au cercle et circonscrit à l'ellipse se ferme est que $u_1 + 2nb$ puisse pour une valeur convenable de n, représenter le même point que u_1 c'est-à-dire que $2nb$ soit un multiple entier de 4ω, soit $4P\omega$. il faut donc et il suffit que l'on puisse trouver deux entiers n et P tels que l'on ait

$$n b = 2P\omega$$

c'est-à-dire que b et ω soient commensurables.—

Cette condition étant indépendante de la position du premier sommet choisi P cela justifie le théorème de Poncelet.

Revenons à la détermination de b.

Il est défini par les deux conditions

$$\Delta \text{am } b = \frac{b}{a}$$

$$\cos \text{am } b = \frac{b}{R}$$

Ces deux équations ne contiennent en apparence qu'une seule inconnue, il semblerait donc qu'elles soient généralement incompatibles; mais il faut bien observer que nous disposons encore du module K des fonctions elliptiques employées

Introduisant sin. am. b ces équations s'écrivent

$$1 - \sin^2 \text{am } b = \frac{b^2}{R^2}$$

$$1 - K^2 \sin^2 \text{am } b = \frac{b^2}{a^2}$$

D'où

$$K^2 = \frac{(a^2 - b^2) R^2}{a^2 (R^2 - b^2)} = \frac{1 - \frac{b^2}{a^2}}{1 - \frac{b^2}{R^2}}$$

Nous prendrons par exemple pour K la racine positive si comme nous le supposons l'ellipse est in-térieure au cercle nous trouvons ainsi pour K une valeur réelle et plus petite que 1, K étant ainsi dé-terminé b est connu par son cosinus amplitude et son Δ amplitude, c'est-à-dire (puisque b est supposé réel) est déterminé par 4 ω près, nous prendrons par exemple la plus petite valeur positive.

Généralisation.

Si nous donnons K sans nous donner b cela don-ne une relation entre les axes de l'ellipse (le cercle étant supposé donné), cette relation définit une série d'ellipses, a chacune correspond une valeur différente de b; si on en considère un certain nombre n corres-pondant à des valeurs $b' \; b'' \ldots b^n$ telle que la somme $b' + b'' \ldots + b^n$ soit égale à un nombre entier de fois 4 ω; il existe une infinité de polygones de n côtés ins-crits au cercle et dont les côtés sont tangents à ces différentes ellipses, on peut choisir arbitrairement un sommet et l'ordre dans lequel se succèderont les

ellipses auxquelles les côtés successifs sont tangents.

On peut encore énoncer ce théorème si $b'b''$ —— b^n sont quelconques que l'on commence à former le polygone de n côtés que nous venons de définir et qu'on le ferme par un $(n+1)^{ième}$ côté ce dernier côté (variable lorsque le premier sommet se déplace sur le cercle ou lorsque l'ordre dans lequel on prend les ellipses successives change) enveloppe une ellipse ; c'est l'ellipse définie par la valeur de b que l'on obtient en retranchant la somme $b' + b''$ —— b^n du multiple de 4ω immédiatement supérieur.

Remarque. – Parmi les ellipses d'une série répondant à une valeur donnée de K il y a toujours une ellipse point ; elle répond à la valeur $b = \omega$, car si l'on fait $a = b = 0$ il vient $\cos am\, b = \Delta\, am\, b = 0$ équations qui sont satisfaites pour $b = \omega$ quelque soit K.

Parmi ces ellipses il y a aussi toujours le cercle lui-même.

En effet faisant $a = b = R$ il vient

$$\cos.\, am.\, b = \Delta\, am\, b = 1$$

équations qui sont satisfaites quelque soit K pour $b = 0$.

Enfin toutes ces ellipses ont avec le cercle les mêmes cordes communes.

Application. – Condition pour qu'il existe des quadrilatères inscrits au cercle et circonscrits à l'ellipse.

Il faut et suffit que la valeur de b définie par les deux équations

$$\Delta.am.b = \frac{b}{a} \quad (1)$$

$$\cos.\, am.\, b = \frac{b}{R} \quad (2)$$

soit telle que l'on ait

$$8\, b = 4\omega$$

ou $$b = \frac{\omega}{2} \quad (3)$$

Eliminant K et b entre les équations (1) (2) et (3)

on obtiendra la condition entre a, b et R

Pour faire cette élimination je remarque que l'on a

$$\sin \text{am} \frac{\omega}{2} = \frac{\cos . \text{am} . \frac{\omega}{2}}{\Delta . \text{am} . \frac{\omega}{2}}$$

c'est un cas particulier de la formule

$$\sin . \text{am} . (\omega - u) = \frac{\cos . \text{am} . u}{\Delta . \text{am} . u}$$

Il résulte donc de là que

$$\sin . \text{am} . b = \frac{a}{R} \quad (4)$$

Entre les équations (2) et (4) on élimine immé-diatement K et b en écrivant que $\cos^2 \text{am}\, b + \sin^2 \text{am}\, b = 1$ il vient ainsi

$$\frac{a^2}{R^2} + \frac{b^2}{R^2} = 1$$

Ou $a^2 + b^2 = R^2$

Telle est la condition nécessaire et suffisante cherchée.

Elle exprime que le cercle est le cercle orthoptique de l'ellipse, et alors tous les quadrilatères sont des rectangles.

Condition pour qu'il existe des triangles

Il faut et suffit pour cela que l'on ait

$$6\, b = 4\omega$$

ou $\quad b = \frac{2\omega}{3}$

Pour faire l'élimination de b et K entre cette équation et les équations (1) et (2), dans la formule

$$\cos . \text{am} . (u - v) = \cos . \text{am} . u . \cos . \text{am} . v . + \sin . \text{am} . u . \sin . \text{am} . v \Delta \text{am} (u - v)$$

je fais $u = \frac{4\omega}{3}$ et $v = \frac{2\omega}{3}$, il vient

$$\cos . \text{am} . \frac{2\omega}{3} = \cos . \text{am} . \frac{4\omega}{3} \cos . \text{am} . \frac{2\omega}{3} + \sin . \text{am} . \frac{4\omega}{3} \sin . \text{am} . \frac{2\omega}{3} \Delta \text{am} \frac{2\omega}{3}$$

Mais comme $\frac{4\omega}{3} = 2\omega - \frac{2\omega}{3}$

on a $\cos.\text{am}.\frac{4\omega}{3} = -\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{3}$

$$\sin.\text{am}.\frac{4\omega}{3} = \sin.\text{am}.\frac{2\omega}{3}$$

il vient

$$\cos.\text{am}\frac{2\omega}{3} = -\cos^2.\text{am}\frac{2\omega}{3} + \sin^2.\text{am}.\frac{2\omega}{3}\,\Delta\,\text{am}\frac{2\omega}{3}$$

ou en remplaçant $\sin^2.\text{am}.\frac{2\omega}{3}$ par $1-\cos^2\text{am}\frac{2\omega}{3}$

$$\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{3}\left(1+\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{3}\right) = \left(1+\cos\text{am}.\frac{2\omega}{3}\right)\left(1-\cos.\text{am}\frac{2\omega}{3}\right)\Delta\,\text{am}\frac{2\omega}{3}$$

ou $$\frac{\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{3}}{\Delta\text{am}.\frac{2\omega}{3}} = 1-\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{3}$$

c'est-à-dire en remplaçant en fonction de a, b et R

$$\frac{a}{R} = 1 - \frac{b}{R}$$

ou $a + b = R$

On peut obtenir immédiatement cette condition en admettant le théorème de Poncelet ; en effet si les triangles existent on en formera un symétrique par rapport à Oy en menant la tangente MN à l'extrémité du grand axe de l'ellipse et joignant MP.

La condition nécessaire et suffisante cherchée s'obtiendra en exprimant que $M.P.$ touche l'ellipse, il vient ainsi

$$a + b = R$$

Condition pour qu'il existe des pentagones

Il faut et il suffit pour cela que l'on ait

$$10\,\mathfrak{b} = 4\omega$$

ou $$\mathfrak{b} = \frac{2}{5}\omega$$

Mais si dans l'expression de $\cos(u-v)$ on fait

$u = \frac{4\omega}{5}$ et $v = \frac{2\omega}{5}$ il vient

$$\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{5} = \cos.\text{am}.\frac{4\omega}{5}\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{5} + \sin.\text{am}.\frac{4\omega}{5}\sin.\text{am}.\frac{2\omega}{5}\Delta\text{am}\frac{2\omega}{5}$$

Pour éliminer les lignes de l'argument $\frac{4\omega}{5}$ dans l'expres-sion de $\cos(u+v)$ faisons u et v égaux à $\frac{4\omega}{5}$; il vient

$$\cos.\text{am}.\frac{8\omega}{5} = \cos^2\text{am}\frac{4\omega}{5} - \sin^2.\text{am}.\frac{4\omega}{5}\Delta.\text{am}.\frac{8\omega}{5}$$

Mais

$$\cos.\text{am}.\frac{8\omega}{5} = -\cos.\text{am}\frac{2\omega}{5}$$

$$\Delta.\text{am}.\frac{8\omega}{5} = \Delta.\text{am}.\frac{2\omega}{5}$$

cette dernière équation s'écrit donc encore

$$\cos.\text{am}.\frac{2\omega}{5} = \cos^2.\text{am}.\frac{4\omega}{5} - \sin^2\text{am}\frac{4\omega}{5}\Delta.\text{am}.\frac{2\omega}{5}$$

Entre cette formule et la précédente on éliminera $\cos.\text{am}.\frac{4\omega}{5}$ et $\sin.\text{am}.\frac{4\omega}{5}$; il viendra ainsi une relation entre les lignes de $\frac{2\omega}{5}$ et dans cette relation on remplacera

$\cos.\text{am}\frac{2\omega}{5}$ par $\frac{b}{R}$

$\Delta\text{am}\frac{2\omega}{5}$ par $\frac{b}{a}$

et $\sin.\text{am}\frac{2\omega}{5}$ par $\sqrt{1-\frac{b^2}{R^2}}$

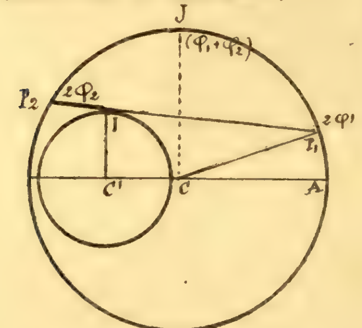
on aura ainsi la relation cherchée entre a, b et R.

18e Leçon.

Théorème de Poncelet (cas de deux cercles) Pendule simple

Théorème de Poncelet.

Proposons-nous, étant donné deux cercles, de trouver la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à l'un et circonscrit à l'autre.



Soit $C\,C'$ les centres des deux cercles, $\underline{R}$ et $\underline{R'}$ leurs rayons, a la distance de leurs centres. Soit une tangente P_1P_2 au cercle C' coupant le cercle C aux points P_1 et P_2 que je définis par les arcs $AP_1 = 2\varphi_1$ et $AP_2 = 2\varphi_2$. Soit I le point de contact de la tangente avec le cercle C'; nous obtiendrons la relation qui lie φ_1 et φ_2 en projetant le contour $C'CP_1IC'$ sur la direction $C'I$ ou encore sur la direction parallèle CJ; il vient ainsi

$$a\cos(\varphi_1+\varphi_2)+R\cos(\varphi_2-\varphi_1)=R'$$

ou en développant

$$(R+a)\cos\varphi_1\cos\varphi_2+(R-a)\sin\varphi_1\sin\varphi_2=R' \quad (A)$$

Posant

$$\varphi_1 = \operatorname{am} u_1$$

et $$\varphi_2 = \operatorname{am} u_2.$$

puis déterminant le module k de ces fonctions et un argument b de manière que l'on ait

$$\Delta.\operatorname{am}.b = \frac{R-a}{R+a} \quad (1)$$

$$\cos . am . h = \frac{R'}{R+a} \quad (2)$$

La relation (A) devient

$$\cos . am . u_2 \cos . am . u_1 + \sin . am . u_2 \sin . am . u_1 \Delta . am . h = \cos . am . h$$

elle exprime que l'on a

$$h = \pm (u_2 - u_1)$$

en supposant que l'on prenne pour u_2 et u_1 les plus petites valeurs positives.

Donc lorsque l'on passe du point P_1 au point P_2 la valeur de u correspondante se trouve augmentée (ou diminuée) de h.

Or pour que le polygone $P_1 P_2 - P_n$ se ferme il faut et suffit que la valeur $2\varphi_n$ qui définit le point P_n soit égale à $2\varphi_1$ augmenté de $2\lambda\pi$; cela correspond pour φ_1 à une augmentation de $\lambda\pi$ et par suite pour u_1 à une augmentation de $\lambda\omega$ (voir 14e Leçon).

La condition nécessaire et suffisante cherchée est donc que l'on puisse trouver un nombre λ tel que

$$n h = 2\lambda\omega$$

Cette condition étant indépendante de la position du point P_1 ceci montre bien que s'il existe un polygone il en existe une infinité

Détermination de h et K.

Les quantités h et K sont déterminées par les équations (1) et (2) ; celles-ci s'écrivent en mettant K en évidence

$$1 - K^2 \sin^2 am\, h = \frac{(R-a)^2}{(R+a)^2}$$

$$1 - \sin^2 am . h = \frac{R'^2}{(R+a)^2}$$

D'où $$K^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2 - R'^2} \quad (3)$$

K étant ainsi déterminé h est connu par son cos. am.

et son Δ.am. (il est déterminé à 2n ω près et nous prendrons la plus petite valeur positive)

La valeur de K^2 ainsi trouvée sera toujours positive et plus petite que l'unité si le cercle C' est intérieur au cercle C ce que nous avons supposé.

Si nous nous donnons K ainsi que le cercle C l'équation (3) détermine une série de cercles, qui, comme il est facile de le constater, ont tous avec C le même axe radical ; c'est-à-dire qu'ils coupent tous le cercle C aux deux mêmes points imaginaires. Quel que soit K le cercle C appartient toujours à la série, il correspond à

$$a = 0$$
$$R' = R$$

alors cos. am. b = 1 et par suite b = 0.

Il y a aussi toujours un cercle point dans la série ; en effet faisant R' = 0, l'équation (3) détermine a (puisque K est supposé donné) ; et les équations (1) (2) donnent

$$\Delta.\text{am.}\, b = \frac{R-a}{R+a} = \sqrt{1-K^2}$$

$$\cos.\text{am.}\, b = 0.$$

elles entrainent $b = \omega$.

Théorème. – Ce point jouit de la propriété suivante :

Si l'on considère un polygone d'un nombre pair de côtés inscrit au cercle C et circonscrit à un cercle C' répondant à une valeur donnée de K ; toutes les diagonales joignant les sommets opposés du polygone passent par le cercle point correspondant à la valeur de K considérée.

En effet soit b_1 la valeur de la constante b répondant au cercle C' ; puisqu'il existe un polygone de 2n côtés inscrit à C et circonscrit à C'

on a $2n\, b_1 = 2\lambda\omega$

λ étant un nombre entier.

C P

Q O

P'

Ceci posé soit Q le cercle point et P l'un des sommets du polygone défini par l'argument u je joins PQ qui coupe la circonférence C en P' je dis que P' est le sommet opposé de P dans le polygone; en effet les arguments des points P et P' diffèrent de ω (qui est la valeur particulière de b répondant au cercle point) ou plus généralement d'un nombre impair de fois ω, l'argument du point P' est donc

$$u' = (2m+1)\omega$$

D'autre part si je considère le sommet P et les sommets successifs du polygone ils ont respectivement pour arguments

u, $u+b_1$, $u+2b_1$, ... et $u+nb_1$ pour le sommet opposé à P; mais $nb_1 = \lambda\omega$; donc l'argument du sommet opposé à P est $u+\lambda\omega$, ce sommet coïncide donc soit avec le point P' (si λ est impair) soit avec le point P (si λ est pair) auquel cas le polygone de $2n$ côtés se réduit à un polygone de n côtés parcouru deux fois — Donc toutes fois que le polygone de $2n$ côtés existe réellement le point P' en est le sommet opposé à P; mais P est un sommet quelconque du polygone, le théorème est donc démontré.

Applications —

Il résulte des raisonnements précédents que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un polygone de n côtés inscrit à C et circonscrit à C'

est que l'on ait

$$n\,b = 2\lambda\,\omega$$

ou, si le polygone doit être simple

$$n\,b = 2\,\omega$$

Pour qu'il existe un quadrilatère la condition est donc

$$b = \frac{\omega}{2}$$

b étant défini par les équations

$$\cos.\,\mathrm{am}.\,b = \frac{r}{R+a}$$

$$\frac{\cos.\,\mathrm{am}.\,b}{\Delta\,\mathrm{am}.\,b} = \frac{r}{R-a}$$

On devra donc ici avoir simultanément

$$\cos\,\mathrm{am}\,\frac{\omega}{2} = \frac{r}{R+a}$$

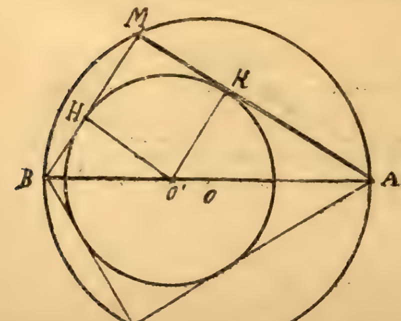
$$\frac{\cos.\,\mathrm{am}.\,\frac{\omega}{2}}{\Delta.\,\mathrm{am}.\,\frac{\omega}{2}} = \frac{r}{R-a}$$

Mais $\sin.\,\mathrm{am}.\,\frac{\omega}{2} = \frac{\cos\,\mathrm{am}\,\frac{\omega}{2}}{\Delta\,\mathrm{am}.\,\frac{\omega}{2}} = \frac{r}{R-a}$

Pour éliminer le module k de la fonction il suffit d'exprimer que l'on a $\sin^2\mathrm{am}\,\frac{\omega}{2} + \cos^2\mathrm{am}\,\frac{\omega}{2} = 1$.
ce qui donne ici la condition cherchée

$$\frac{r^2}{(R+a)^2} + \frac{r^2}{(R-a)^2} = 1$$

Étant admis qu'il suffit, pour qu'il existe une infinité de quadrilatères, qu'il en existe un, on peut apercevoir cette condition par la géométrie – En effet je prends pour un sommet le point A, le quadrilatère s'il existe sera alors



symétrique par rapport à AB et aura son sommet opposé à A situé en B, la condition pour que le quadrilatère existe est donc que les tangentes menées de A et de B au cercle O' concourent sur le cercle O c'est-à-dire soient à angle droit — Pour exprimer cette condition il suffit d'écrire que la somme des angles O'BM, O'AM est un droit, c'est-à-dire que la somme des carrés de leurs sinus est l'unité

$$\text{mais } \sin O'AM = \frac{O'K}{O'A} = \frac{r}{R+a}$$

$$\sin O'BM = \frac{O'H}{O'B} = \frac{r}{R-a}$$

élevant au carré et ajoutant il vient la condition précédemment trouvée

$$\frac{r^2}{(R+a)^2} + \frac{r^2}{(R-a)^2} = 1$$

Pour qu'il existe des triangles il faut et suffit que l'on ait

$$b = \frac{2\omega}{3}$$

Mais nous avons établi (à propos de la même application dans la 17e leçon) que l'on a quelque soit K

$$\frac{\cos.\mathrm{am}.\,2\frac{\omega}{3}}{\Delta.\mathrm{am}.\,\frac{2\omega}{3}} = 1 - \cos.\mathrm{am}.\,\frac{2\omega}{3}$$

Remplaçant en fonction de R, r, et a il vient la condition cherchée

$$\frac{r}{R-a} = 1 - \frac{r}{R+a}$$

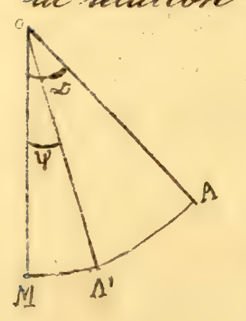
On retrouverait cette condition par la géométrie comme la précédente.

On voit que la démonstration du théorème de Poncelet dans ce cas est de tous points analogues à celle du cas de l'ellipse et du cercle concentriques;

les axes a et b sont ici remplacés $\frac{r}{R-a}$ et $\frac{r}{R+a}$; de plus ici la loi de succession simple des arguments ne se rapporte plus comme dans le cas précédent aux sommets eux-mêmes, mais aux milieux des arcs compris entre un point fixe et ces sommets ; il en résulte que ces milieux sont les sommets d'un polygone inscrit au cercle C' et circonscrit à une ellipse concentrique.

Durée d'oscillation du pendule simple –

L'équation des forces vives donne immédiatement la relation



$$V^2 = 2gh$$

Si le pendule est supposé abandonné à lui-même sans vitesse initiale, et si V représente sa vitesse linéaire lorsqu'il est descendu d'une hauteur h.

Si α est l'angle d'écart initial et ψ l'angle d'écart au moment considéré, cette équation devient

$$l^2\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = 2gl\,(\cos\psi - \cos\alpha)$$

d'où l'on tire

$$dt = \sqrt{\frac{l}{2g}}\,\frac{-d\psi}{\sqrt{\cos\psi - \cos\alpha}}$$

Remplaçant cos ψ et cos α respectivement par

$$1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2} \quad \text{et} \quad 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

puis posant

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi$$

il vient tous calculs faits

$$dt = \sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{-d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}$$

Intégrant cette expression entre les limites convenables on obtiendra le temps nécessaire au pendule pour aller d'une position à une autre.

Si le pendule va d'une position quelconque à la position d'équilibre, φ varie d'une certaine valeur φ_1 a 0 et l'on a

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{\varphi_1}^{0} \frac{-d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}} = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_{0}^{\varphi_1} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\varphi}}$$

Cette équation exprime que

$$\varphi_1 = \mathrm{am}.\, T\sqrt{\frac{g}{l}}$$

le module K étant égal à $\sin\frac{\alpha}{2}$

on a donc

$$\sin\varphi_1 = \sin.\,\mathrm{am}.\, T\sqrt{\frac{g}{l}}$$

et par suite ψ_1 étant l'angle d'écart à partir duquel on évalue la durée

$$\sin\frac{\psi_1}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}\,\sin.\,\mathrm{am}.\, T\sqrt{\frac{g}{l}} \quad (1)$$

Pour avoir la durée totale d'une demi oscillation il suffit de faire $\psi_1 = \alpha$ il vient ainsi

$$\sin.\,\mathrm{am}.\, T\sqrt{\frac{g}{l}} = 1$$

D'où

$$T\sqrt{\frac{g}{l}} = \omega \quad \text{ou} \quad T = \omega\sqrt{\frac{l}{g}}$$

si α se réduit à 0, le module K devient nul et ω est égal à $\frac{\pi}{2}$; on retrouve ainsi la formule élémentaire.

Vitesse du pendule. Il est aisé de trouver l'expression de la vitesse angulaire; dérivant l'équation (1) il vient.

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\psi}{2}\,\frac{d\psi}{dt} = \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\cos am\, t\sqrt{\frac{g}{l}}\,\Delta am\, t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

mais

$$\cos\frac{\psi}{2} = \sqrt{1-\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2 am\, t\sqrt{\frac{g}{l}}} = \Delta am\, t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

Il reste donc

$$\frac{d\psi}{dt} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\cos.am.\,t\sqrt{\frac{g}{l}}$$

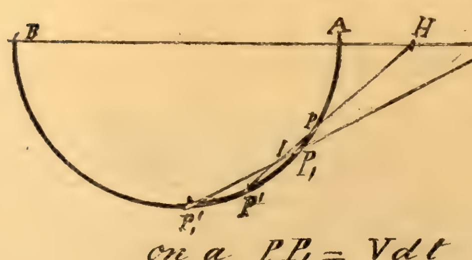
Celle est l'expression de la vitesse angulaire du pendule à un instant quelconque.

Ces formules permettent de résoudre un grand nombre de problèmes relatifs au pendule.

Si par exemple le pendule met un temps T à aller d'une position quelconque A' à sa position d'équilibre M et si l'on cherche sa position au bout du temps $\frac{T}{2}$, il suffit de calculer le sinus amplitude de $\frac{T}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}$ en fonction de celui de l'argument double; problème qui peut se résoudre à l'aide de la règle et du compas.

Problème (Jacobi).

Considérons deux pendules qu'on laisse tomber successivement sans vitesse initiale et à partir d'une même position initiale A; soit PP' deux positions simultanées des deux pendules, proposons nous de chercher l'enveloppe de la droite PP'



Soit PP' les positions considérées des deux pendules, $P_1P'_1$ leurs positions un temps infiniment petit dt après si V et V' sont les vitesses des deux pendules en P et P'

on a $PP_1 = V\,dt$

$P'P'_1 = V'dt$

Mais V et V' sont respectivement proportionnels aux racines carrées des hauteurs de chute à partir du point de départ A ; ou encore aux racines carrées des distances PH et P'H comptées suivant une direction quelconque jusqu'à l'horizontale du point A

On a donc $\dfrac{PP_1}{P'P'_1} = \dfrac{\sqrt{PH}}{\sqrt{P'H}}$

Mais les deux triangles PIP$_1$ et P$'_1$IP' sont semblables ; on a donc

$$\frac{PP_1}{P'P'_1} = \frac{IP}{IP'_1}$$

ou en remplaçant IP$'_1$ par IP' qui n'en diffère que d'une quantité infiniment petite.

$$\frac{IP}{IP'} = \frac{PP_1}{P'P'_1} = \frac{\sqrt{PH}}{\sqrt{P'H}}$$

De cette dernière proportion on déduit

$$\frac{IP^2}{IP'^2} = \frac{PH}{P'H}$$

ou

$$\frac{(HI-HP)^2}{(HP'-HI)^2} = \frac{HP}{HP'} = \frac{HI.HP}{HI.HP'} = \frac{(HI-HP)^2+2HI.HP}{(HP'-HI)^2+2HI.HP'}$$

c'est-à-dire encore

$$\frac{HP}{HP'} = \frac{HI^2+HP^2}{HP'^2+HI^2}$$

D'où $HI^2 = HP.HP' = HA.HB$

Cette équation montre que la droite HI touche au point I le cercle qui passe par les 3 points ABI ; d'ailleurs le point I intersection de deux positions infiniment voisines de PP' est le point où PP' touche son enveloppe ; il résulte de là ou bien que le cercle ABI est fixe et est l'enveloppe cherchée ou bien que ce cercle est variable et a même enveloppe que PP'.

mais cette dernière hypothèse est absurde car le cercle ABI passe nécessairement par deux points fixes qui constituent son enveloppe ; cette enveloppe ne saurait convenir à la droite PP'; donc la première hypothèse est la seule acceptable : le cercle ABI est fixe et il est l'enveloppe de PP'.

19e Leçon.

Pendule simple. Problème de Jacobi. Pendule conique.

Problème de Jacobi. Le problème de Jacobi que nous avons résolu par la géométrie peut se rattacher au théorème de Poncelet à la condition d'admettre que la démonstration de celui-ci subsiste lorsque les fonctions elliptiques introduites ont un module supérieur à l'unité (ce qui correspond par exemple pour le cas de deux cercles à des cercles qui se coupent en des points réels).

En effet si nous reprenons le calcul du pendule simple, nous avions trouvé

$$dt = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{-d\Psi}{\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\Psi}{2}}} = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\,\frac{-d\Psi}{\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin^2\frac{\Psi}{2}}}$$

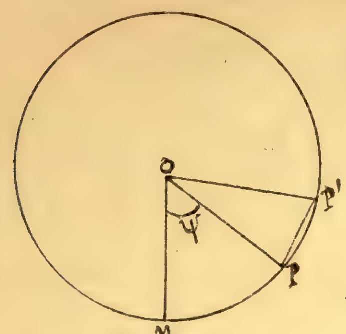
Intégrant on obtient une fonction elliptique de module $\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ plus grand que 1.

On aura alors pour définir le temps de chute entre la position correspondant à l'angle d'écart Ψ et la position d'équilibre la relation

$$t = \frac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\Psi}\frac{d\frac{\Psi}{2}}{\sqrt{1-\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}\sin^2\frac{\Psi}{2}}}$$

d'où $\frac{\psi}{2} = \text{am}\left(\sin.\frac{\alpha}{2}\sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right)$

Les deux points P et P' correspondent à des positions du pendule séparées par un intervalle de temps constant — Donc les valeurs correspondantes de $\frac{\psi}{2}$ s'obtiennent en augmentant l'argument d'une constante.



Or ψ mesure l'arc MP, on est donc exactement ramené aux calculs du théorème de Poncelet dans le cas de deux cercles et en vertu de la réciproque de celui-ci, que nous avons indiquée, la droite enveloppe un cercle ayant son centre sur MO.

Pendule conique — Rapportons la position du point mobile à trois axes rectangulaires passant par le point de suspension et dont l'axe des Z est dirigé suivant la verticale de haut en bas.

Si R est la longueur du fil on a d'abord l'équation nécessaire

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \qquad (1)$$

Le principe des forces vives donne l'équation

$$\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g\,(z - h) \qquad (2)$$

en posant pour définir h, $2g(z_0 - h) = V_0^2$ (V_0 étant la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de z)

Enfin si l'on observe que les forces tant réelles que fictives qui agissent sur le point matériel sont dans un même plan avec Oz on pourra appliquer le principe des aires au mouvement projeté sur le plan des xy : il vient ainsi la 3e équation.

$$x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt} = K \qquad (3)$$

De (1) on déduit en différentiant

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} + z\frac{dz}{dt} = 0.$$

ou $$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = -z\frac{dz}{dt} \quad (4)$$

Elevant les équations (3) et (4) au carré et ajoutant il vient

$$(x^2+y^2)\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] = K^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

Eliminant (x^2+y^2) et $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2$ au moyen des équations (1) et (2) il vient entre z et $\frac{dz}{dt}$ une équation qui définit le mouvement du pendule par rapport à la verticale

cette équation est

$$(R^2 - z^2)\left[2g(z-h) - \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right] = K^2 + z^2\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

ou en résolvant par rapport à dt

$$dt = \frac{R\,dz}{\sqrt{2g(z-h)(R^2-z^2) - K^2}}$$

Le polynôme sous le radical est du 3e degré en z, ses trois racines sont réelles, en effet substituant successivement à z les valeurs $-\infty$, $-R$, $+R$ et $+\infty$ on trouve pour le signe du résultat $+, -, -, -$, il y a donc une racine comprise entre $-\infty$ et $-R$ je la désigne par $-\gamma$; il y a d'ailleurs encore deux racines α et β comprises entre $-R$ et $+R$ en effet il existe nécessairement des valeurs de z comprises dans cet intervalle rendant le polynôme sous le radical positif, c'est-à-dire donnant pour la vitesse $\frac{dz}{dt}$ une valeur réelle ; c'est par exemple la valeur $z = z_0$.—

Décomposant le polynôme en facteurs du premier degré il vient

$$dt = \frac{R}{\sqrt{2g}} \frac{dz}{\sqrt{(z+\gamma)(z-\alpha)(\beta-z)}}$$

Pour intégrer cette différentielle, je fais le changement de variable

$$z = \alpha \sin^2 \mathrm{am}\, u + \beta \cos^2 \mathrm{am}\, u$$

Alors

$$(z-\alpha) = (\beta-\alpha) \cos^2 \mathrm{am}\, u$$

$$(\beta - z) = (\beta-\alpha) \sin^2 \mathrm{am}\, u$$

$$z+\gamma = \alpha \sin^2 \mathrm{am}\, u + \beta \cos^2 \mathrm{am}\, u + \gamma = \gamma+\beta+(\alpha-\beta)\sin^2 \mathrm{am}\, u$$

$$= (\gamma+\beta)\left(1 - \frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma} \sin^2 \mathrm{am}\, u\right)$$

Le module k des fonctions elliptiques employées est encore arbitraire ; je le définis par la condition

$$k^2 = \frac{\beta-\alpha}{\beta+\gamma}$$

ceci définit nécessairement un module réel et plus petit que 1 (car nous supposons $\beta > \alpha$)

Alors on a

$$(z+\gamma) = (\gamma+\beta)\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u$$

Enfin il résulte de la formule de transformation que l'on a

$$dz = du\,(2\alpha \sin \mathrm{am}\, u \cos \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u - 2\beta \cos \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u)$$

Substituant dans d.t. il vient.

$$dt = \frac{2R}{\sqrt{2g}} \frac{(\alpha-\beta)\cos \mathrm{am}\, u \sin \mathrm{am}\, u\, \Delta \mathrm{am}\, u\, du}{\sqrt{(\beta-\alpha)^2(\gamma+\beta)\cos^2 \mathrm{am}\, u \sin^2 \mathrm{am}\, u\, \Delta^2 \mathrm{am}\, u}} = \pm \frac{2R\, du}{\sqrt{2g(\beta+\gamma)}}$$

D'où en intégrant

$$t = \pm \frac{2Ru}{\sqrt{2g(\gamma+\beta)}} + C^{te}$$

Si nous prenons pour origine des temps le moment où le mobile est le plus bas (lequel correspond à $z=\beta$) t et u s'annulent en même temps et la constante est nulle, et il faudra prendre le signe + ou le signe − suivant que t et u varieront dans le même sens ou en sens contraire c'est-à-dire que l'on considèrera le mouvement dans un sens ou l'autre.

On peut donc prendre

$$t = \frac{2Ru}{\sqrt{2g(\beta+\gamma)}}$$

Posant $m = \frac{\sqrt{2g(\beta+\gamma)}}{2R}$

on a $u = mt$

et

$$z = \alpha \sin^2 \mathrm{am}\, mt + \beta \cos^2 \mathrm{am}\, mt$$

Cette formule s'écrit encore

$$z = \alpha + (\beta-\alpha) \cos^2 \mathrm{am}\, mt$$

$$z = \beta - (\beta-\alpha) \sin^2 \mathrm{am}\, mt$$

On voit immédiatement sous cette forme que z varie toujours entre α et β.

D'ailleurs z est une fonction périodique du temps la période est donnée par $mt = 2\omega$ ou $t = \frac{2\omega}{m}$.

Cas du mouvement dans un plan vertical.

Si l'on suppose que le mouvement s'effectue dans un plan vertical on retombe sur le cas du pendule simple — Il suffit pour cela de supposer la constante des aires nulle.

Dans ces conditions les trois racines du polynôme du 3e degré sous le radical deviennent

$$Z = \pm R$$
$$Z = h$$

D'après la définition même de h il est inférieur à $+R$ nous le supposerons d'ailleurs supérieur à $-R$ (s'il n'en était pas ainsi le mouvement pendulaire serait physiquement impossible)

Dans ces conditions γ est devenu égal à R, α à h et β à R.

On a donc posé

$$Z = h \sin^2 \mathrm{am}\, u + R \cos^2 \mathrm{am}\, u$$

le module K étant égal à $\sqrt{\frac{R-h}{2R}}$

et l'on trouve $t = \sqrt{\frac{R}{g}}\, u$

Pour retrouver les formules précédemment établies je pose $Z = R\cos\psi$; je remarque d'ailleurs que si la vitesse initiale est nulle, on aura $h = R\cos\alpha$ (α étant l'angle d'écart initiale) alors le module K devient

$$\sqrt{\frac{R(1-\cos\alpha)}{2R}} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

et la formule de transformation

$$R\cos\psi = R\cos\alpha \sin^2 \mathrm{am}\, u + R\cos^2 \mathrm{am}\, u$$

ou $\left(1 - 2\sin^2\frac{\psi}{2}\right) = \left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)\sin^2 \mathrm{am}\, u + \cos^2 \mathrm{am}\, u.$

ou $\sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \sin \mathrm{am}\, u$

Remplaçant u par sa valeur en fonction de t il vient

$$\sin\frac{\psi}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} \sin \mathrm{am}\, t\sqrt{\frac{g}{R}}$$

le module de la fonction elliptique étant

$$K = \sin\frac{\alpha}{2}$$

Ce sont les formules trouvées directement.

Cas du mouvement dans un plan horizontal.–

Supposons que les circonstances initiales soient telles que les deux racines α et β du polynome du 3e degré soient égales (c'est-à-dire qu'il existe une relation convenable entre R, b et K) –

Les formules précédentes que nous supposons encore applicables donnent

$$z = \alpha \cos^2 \mathrm{am}\, u + \beta \sin^2 \mathrm{am}\, u = \alpha = \beta .$$

Donc z est constant le mouvement s'effectue alors suivant un cercle horizontal.

La condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que les forces réelles et fictives agissant sur le mobile aient une résultante horizontale égale à la force centripète c'est-à-dire à $\omega^2 r$, si ω est la vitesse angulaire, et r le rayon AP du cercle décrit, c'est-à-dire encore à

$$\omega^2 R \sin \psi$$

Cette force sera la résultante AC du poids du mobile AD et de la tension du fil AB

Dans le parallélogramme ABCD ; on aura

$$\frac{AC}{AD} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \operatorname{tg}\psi$$

ou

$$\frac{\omega^2 R \sin\psi}{m g} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$$

c'est-à-dire

$$\omega^2 R \cos\psi = m g$$

C'est là la relation entre l'angle d'écart initial et la vitesse angulaire horizontale à imprimer au pendule pour qu'il décrive le cercle.

La tension exercée par le fil pendant le mouvement est définie par cette condition que composée avec le poids elle reproduit la force centripète; la tension du fil sera égale à cette valeur car si elle en prenait une autre le mobile serait nécessairement

rejeté en dehors ou en dedans de la sphère de centre O et de rayon R, ce que nous ne supposons pas possible.

20e Leçon.

Problème de la transformation des modules des fonctions elliptiques. —

Méthode de Lagrange. — Méthode générale de Jacobi.

But du problème de la transformation. —

Lorsque nous avons étudié la fonction $z = \sin.\text{am}.u$ définie par la relation

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-k^2z^2}}$$

nous avons supposé k constant et u variable, z était alors une fonction de u seul ; mais pour une même valeur de u z a des valeurs différentes lorsque l'on fait varier k ; c'est ainsi que si k est nul z devient un sinus trigonométrique ; si k est égal à l'unité on a

$$u = \int_0^z \frac{dz}{1-z^2} = \frac{1}{2}\, L\, \frac{1+z}{1-z}$$

et par suite $z = \dfrac{e^{2u}-1}{e^{2u}+1}$, z est donc une fonction exponentielle de u —

Le but du problème de la transformation est d'établir des relations entre les fonctions elliptiques de modules k différents ; cela permettra d'évaluer ces fonctions à l'aide d'une fonction de module déterminé (cette fonction sera dans la pratique

pour les calculs approchés le sinus trigonométrique).

Pour réaliser une transformation on fera dans l'intégrale u un changement de variable défini par une formule $z = \varphi(y)$ choisie de telle manière que la nouvelle intégrale soit à un facteur constant près une intégrale elliptique mais de module différent. On aura de la sorte une relation algébrique entre les sinus amplitude z et y de deux arguments dont le rapport est constant, les modules des sinus amplitude étant différents et liés entre eux par une formule $f(K, K') = 0$.

On distingue essentiellement les transformations qui donnent une fonction $f(K, K')$ symétrique ou non symétrique — Dans le premier cas la transformation permet de ramener les fonctions de module K aux fonctions de module K', mais elle ne permet pas de ramener de même celles de module K' à celles d'un autre module et ainsi de suite; dans le deuxième cas au contraire en appliquant la même transformation aux différents modules auxquels on est amené successivement on forme une échelle indéfinie de modules, telle que si on connaît les valeurs de la fonction répondant à l'un de ces modules, on connaîtra les valeurs de toutes les fonctions, répondant aux autres modules de l'échelle.

Cas où la relation entre les modules est symétrique.

Nous avons déjà vu un exemple de transformation dans le cas où les deux modules sont liés par une relation symétrique, en établissant la formule du pendule — Nous avons remplacé un module par son inverse.

Il suffit pour cela dans l'intégrale

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\,\sqrt{1-K^2 z^2}}$$

de faire le changement de variable

$$z = \frac{y}{K}$$

il vient

$$u = \int_0^y \frac{\frac{dy}{K}}{\sqrt{1-\frac{y^2}{K^2}}\sqrt{1-y^2}} = \frac{1}{K}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-K'^2y^2}\sqrt{1-y^2}}$$

en posant $K' = \frac{1}{K}$.

Donc de la connaissance de $z = \sin am\, u$, le module de la fonction étant K on déduit immédiatement celle de $y = \sin am\,(Ku)$; le module de cette nouvelle fonction étant $\frac{1}{K}$.

De même si l'on fait le changement de variables défini par la relation

$$K^2 z^2 + K'^2 y^2 = 1$$

on obtient une fonction elliptique de module K', K' étant lié à K par la relation symétrique

$$K^2 + K'^2 = 1$$

Transformation de Lagrange.

La première transformation non symétrique a été indiquée par Lagrange; elle consiste à faire le changement de variables défini par l'équation

$$z = \frac{y}{a+by^2}$$

ou a et b sont des coefficients encore indéterminés et qui pourront être déterminés de manière que la nouvelle intégrale obtenue soit une intégrale elliptique.

Soit

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2z^2}}$$

faisant le changement de variables il vient

$$u = \int_0^y \frac{\frac{a-by^2}{(a+by^2)^2}\,dy}{\sqrt{1-\frac{y}{a+by^2}}\sqrt{1+\frac{y}{a+by^2}}\sqrt{1-\frac{Ky}{a+by^2}}\sqrt{1+\frac{Ky}{a+by^2}}}$$

$$=\int_0^y \frac{(a-by^2)\,dy}{\sqrt{a+by^2-y}\,\sqrt{a+by^2+y}\,\sqrt{a+by^2-Ky}\,\sqrt{a+by^2+Ky}}$$

Cette nouvelle intégrale présente au numérateur un facteur du 2e degré, et au dénominateur la racine carrée d'un polynôme du 8e degré ; elle se réduira à une intégrale elliptique si l'on peut déterminer a et b. de manière que la quantité sous le radical contienne en facteur le carré d'un polynôme du 2e degré qui soit précisément celui qui figure au numérateur. Or cela est possible ; en effet si le polynôme $(a+by^2-Ky)$ est carré parfait, le polynôme correspondant $(a+by^2+Ky)$ le sera aussi et ils seront respectivement les carrés des deux facteurs de $(a-by^2)$; il suffit pour cela que l'on pose

$$K^2 = 4ab$$

S'il en est ainsi il vient

$$u=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{a+by^2-y}\,\sqrt{a+by^2+y}}$$

Pour que cette intégrale prenne la forme ordinaire il suffit que les deux trinômes sous les radicaux admettent respectivement la racine +1 et la racine −1, c'est-à-dire que l'on ait

$$a+b=1$$

il vient alors

$$u=\frac{1}{a}\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\,\sqrt{1-K'^2y^2}}$$

en posant

$$K'=\frac{b}{a}$$

Les coefficients a et b sont donc déterminés

par les deux relations.

$$4ab = K^2$$
$$a + b = 1$$

et le nouveau module K' est égal à $\frac{b}{a}$

On déduit de là les expressions de a et b en fonction de K'

$$a = \frac{1}{1+K'}$$
$$b = \frac{K'}{1+K'}$$

on a d'ailleurs entre K et K' la relation

$$\frac{4K'}{(1+K')^2} = K^2$$

ou $$K = \frac{2\sqrt{K'}}{1+K'}$$

Enfin la formule de transformation s'écrit

$$z = \frac{y(1+K')}{1+K'y^2}$$

Dans ces conditions si l'on a

$z = \sin.\mathrm{am}.\, u$ le module étant K

on aura

$y = \sin.\mathrm{am}\, \frac{u}{1+K'}$ le module étant K'

y et z étant liés par la relation algébrique

$$z = \frac{y(1+K')}{1+K'y^2}$$

Relations entre les périodes. –

Proposons nous de chercher les relations qui existent entre les périodes des deux fonctions

de module K et K' que nous venons de considérer — Soit ω et $\omega' i$ les deux quantités qui définissent les périodes de la fonction de module K; Ω et $\Omega' i$ celles qui définissent les périodes de la fonction de module K'

On a par définition

$$\omega = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2 z^2}}$$

faisant le changement de variable il vient

$$\omega = \int_0^1 \frac{(1+K')\,dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-K'^2 y^2}} = (1+K')\,\Omega$$

On a de même (comme nous l'avons démontré cours de 2e année P.149)

$$\omega' i = \int_0^\infty \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\sqrt{1-K^2 z^2}}$$

faisant le changement de variables il vient

$$\omega' i = \int_0^{\frac{i}{\sqrt{K'}}} \frac{(1+K')\,dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-K'^2 y^2}}$$

mais on a vu (cours de 2e année page 151) que $\frac{i}{\sqrt{K}}$ est égal à $\sin.\mathrm{am}\left(\frac{\omega' i}{2}\right)$, on a donc

$$\omega' i = \int_0^{\frac{i}{\sqrt{K'}}} \frac{(1+K')\,dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-K'^2 y^2}} = (1+K')\frac{\Omega' i}{2}$$

Les périodes de la nouvelle fonction sont donc liées à celles de l'ancienne par les relations

$$\omega = (1+K')\,\Omega$$

$$\omega' i = (1+K')\frac{\Omega' i}{2}$$

D'où

$$\frac{\omega}{\omega'} = 2\frac{\Omega}{\Omega'}$$

Problème général de la transformation.-

Ce problème a été étudié et résolu simultanément par Abel et par Jacobi _ Abel a donné le théorème suivant.

Théorème.- Pour qu'il soit possible de déduire les fonctions elliptiques de module K de celles de module K' par une transformation algébrique il faut que les rapports $\frac{\omega'}{\omega}$ relatifs aux deux fonctions soient entre eux dans un rapport commensurable _ On peut d'ailleurs remarquer que lorsque K varie de 0 à 1 ce rapport $\frac{\omega'}{\omega}$ varie de l'infini à 0, car si $K=0$, $\omega'=\infty$ et $\omega=\frac{\pi}{2}$, si $K=1$ $\omega'=0$ et $\omega=\infty$.

Pour établir le théorème je suppose que, étant donné l'intégrale

$$u=\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}\ \sqrt{1-K^2z^2}}$$

par une transformation algébrique $z=\varphi(y)$ on l'ait mise sous la forme

$$\lambda u=\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\ \sqrt{1-K^2y^2}}$$

Puisqu'il existe entre y et z une relation algébrique, c'est que, à une valeur donnée de z correspondent un nombre déterminé de valeurs de y et réciproquement; or si l'on donne z, on donne une infinité de valeurs de u comprises dans les formules.

$$u=\alpha+4m\omega+2n\omega' i$$

ou $$u=2\omega-\alpha+4m\omega+2n\omega' i$$

les valeurs correspondantes de λu seront

$$\lambda u=\lambda\alpha+4m\lambda u+2n\lambda\omega' i$$
$$\lambda u=2\lambda\omega-\lambda\alpha+4m\lambda\omega+2n\lambda\omega' i$$

pour que y qui est le sinus amplitude de λu ait un nombre fini des valeurs il faut que pour des valeurs suffisamment grandes de m et n on retrouve les valeurs précédentes de λu augmentées de multiples entiers des périodes $4\,\Omega$ et $2\,\Omega' i$; il faut donc en supposant λ réel que $\lambda\omega$ soit commensurable avec Ω et $\lambda\omega'$ avec Ω'; c'est-à-dire encore que $\frac{\omega'}{\omega}$ soit commensurable avec $\frac{\Omega'}{\Omega}$

Application. – Proposons nous étant donné la fonction u de module K de chercher une transformation donnant une fonction de module K' dont les périodes sont définies par les quantités

$$\Omega = \lambda\,\omega$$

$$\Omega' = 2\,\lambda\,\omega'$$

Lorsque z est donné toutes les valeurs de λu sont comprises dans les formules

$$\lambda u = \lambda\alpha + 4m\lambda\omega + 2n\lambda\,\omega' i = \lambda\alpha + 4m\,\Omega + n\,\Omega' i$$

$$\text{ou } \lambda u = 2\lambda\omega - \lambda\alpha + 4m\lambda\omega + 2n\lambda\omega' i = 2\Omega - \lambda\alpha + 4m\Omega + n\Omega' i$$

donnant pour y deux valeurs suivant que n est pair ou impair.

Réciproquement donnant y on donne [tous] λu une infinité de valeurs comprises dans les formules

$$\lambda u = \beta + 4m\,\Omega + 2n\,\Omega' i$$

$$\lambda u = 2\,\Omega - \beta + 4m\,\Omega + 2n\,\Omega' i$$

et par suite pour u les valeurs

$$u = \frac{\beta}{\lambda} + 4m\omega + 4n\,\omega' i$$

$$u = 2\omega - \frac{\beta}{\lambda} + 4m\,\omega + 4n\,\omega' i$$

ce qui ne donne pour z qu'une seule valeur.

Donc la formule de transformation qui liera y et z devra être du premier degré par rapport à z et du 2e par rapport à y ; elle sera donc de la forme

$$z = \frac{Ay^2 + By + C}{A'y^2 + B'y + C'} \qquad (1)$$

Les coefficients $A, B, C, A', B' C'$ peuvent être déterminés à priori par les conditions mêmes du problème.

Tout d'abord y et z doivent s'annuler en même temps donc C est nul ; si maintenant je suppose $y = \infty$, λu prend la valeur $\Omega' i$ et par suite u la valeur $2\omega' i$ pour laquelle z est nul par suite le dénominateur de (1) est de degré supérieur au numérateur et l'on a $A = 0$ si l'on change y en $-y$, z doit se changer en $-z$, le numérateur de (1) changeant de signe le dénominateur ne doit pas changer, donc B' est nul et (1) se réduit à

$$z = \frac{By}{A'y^2 + C'}$$

que l'on peut encore écrire

$$z = \frac{y}{a + by^2}$$

Faisant $z = 1$, il vient $u = \omega$

$$\lambda u = \lambda \omega = \Omega$$

et par suite $y = 1$

ce qui entraîne

$$a + b = 1 \quad (2)$$

z doit être infini pour $u = \omega' i$ c'est-à-dire pour $\lambda u = \lambda \omega' i = \dfrac{\Omega' i}{2}$ ce qui donne $y = \dfrac{i}{\sqrt{k'}}$

on doit donc avoir

$$a + b\left(\frac{i}{\sqrt{k'}}\right)^2 = 0$$

ou

$$a k' - b = 0 \quad (3)$$

De (2) et (3) on déduit

$$a = \frac{1}{1+K'}$$

$$b = \frac{K'}{1+K'}$$

La formule de transformation devient donc

$$z = \frac{y(1+K')}{1+K'y^2}$$

Pour obtenir la relation qui lie K et K' je fais $u = \omega + \omega' i$ alors z est comme on sait égal à $\frac{1}{K}$

λu devient $\lambda u + \lambda \omega' i = \Omega + \frac{\Omega' i}{2}$

et $y = \sin . am . \left(\Omega + \frac{\Omega' i}{2}\right)$

mais $\sin . am . (\Omega + x) = \frac{\cos . am . x}{\Delta . am . x}$

ce qui donne ici

$$y = \frac{\cos . am \frac{\Omega' i}{2}}{\Delta am \frac{\Omega' i}{2}} = \frac{\sqrt{1+\frac{1}{K'}}}{\sqrt{1+K'^2\left(\frac{1}{K'}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{K'}}$$

Portant ces valeurs simultanées de y et z dans la formule de transformation il vient

$$\frac{1}{K} = \frac{\frac{1}{\sqrt{K'}}(1+K')}{1+\frac{K'}{(\sqrt{K'})^2}} = \frac{1+K'}{2\sqrt{K'}}$$

ou $K = \frac{2\sqrt{K'}}{1+K'}$

Nous retrouvons ainsi la transformation de Lagrange

Problème.- Proposons nous de chercher une transformation dans laquelle les nouvelles périodes soient respectivement

$$\Omega = 2\lambda\omega \qquad \Omega' = \lambda\omega'$$

Etant donné z, les valeurs correspondantes de u sont

$$u = \alpha + 4m\omega + 2n\omega' i$$

$$u = 2\omega - \alpha + 4m\omega + 2n\omega' i$$

et celles de λu

$$\lambda u = \lambda\alpha + 2m\Omega + 2n\Omega' i$$

$$\lambda u = \Omega - \lambda\alpha + 2m\Omega + 2n\Omega' i$$

chacune de ces formules donne pour y deux valeurs différentes mais égales et de signe contraire suivant que m est pair ou impair.

Réciproquement si l'on donne y on donne pour λu les valeurs

$$\lambda u = \beta + 4m\Omega + 2n\Omega' i$$

$$\lambda u = 2\Omega - \beta + 4m\Omega + 2n\Omega' i$$

et pour u les valeurs

$$u = \frac{\beta}{\lambda} + 8m\omega + 2n\omega' i$$

$$u = 4\omega - \frac{\beta}{\lambda} + 8m\omega + 2n\omega' i$$

qui correspondent pour z à deux valeurs égales et de signe contraire. Donc la relation qui lie y et z sera du premier degré en z^2 et du deuxième en y^2 ; elle sera de la forme.

$$z^2 = \frac{A + By^2 + Cy^4}{A' + B'y^2 + C'y^4}$$

Si l'on remarque que y et z sont nuls et infinis en même temps on peut ramener cette équation à la forme

$$z^2 = \frac{by^2 + cy^4}{1 + \text{b}\, y^2} \qquad (1)$$

Pour déterminer les coefficients b, c, b nous allons comme

dans l'exemple précédent donner des valeurs particulières aux variables.

Si l'on fait $u = 2\omega$, z est nul, λu est égal à Ω et par suite y est égal à 1; on a donc

$$b = c = 1 \quad (2)$$

Si z est infini on a vu qu'il y avait une valeur de y infinie et cela a permis d'abaisser le degré du dénominateur; mais z peut aussi être infini pour $u = 2\omega + \omega' i$, par suite pour $\lambda u = \Omega + \Omega' i$ et la valeur correspondante de y sera $\frac{1}{k'}$: elle devra annuler le dénominateur c'est-à-dire que l'on a

$$1 + \frac{b}{k'^2} = 0 \quad \text{ou} \quad b = -k'^2 \quad (3)$$

Si maintenant nous donnons successivement à u les valeurs u et $u + \omega' i$, les valeurs correspondantes de z sont z et $\frac{1}{kz}$; pour λu on a les valeurs λu et $\lambda u + \Omega' i$ qui correspondent pour y aux valeurs y et $\frac{1}{k'y}$; donc la formule (1) ne doit pas changer lorsque l'on change simultanément z en $\frac{1}{kz}$ et y en $\frac{1}{k'y}$; faisant ce changement il vient en simplifiant la formule (1) à l'aide des relations (2) et (3)

$$\frac{1}{k^2 z^2} = \frac{b\left(\frac{1}{k'^2 y^2} - \frac{1}{k'^4 y^4}\right)}{1 - \frac{1}{y^2}}$$

$$\text{ou} \quad z^2 = \frac{k'^4}{k^2 b} \; \frac{y^4 - y^2}{k'^2 y^2 - 1}$$

cette formule doit être identique à la formule de transformation $z^2 = \dfrac{b\,(y^2 - y^4)}{1 - k'^2\, y^2}$

ce qui donne la condition

$$\frac{k'^4}{k^2 b} = b \quad \text{ou} \quad b = \frac{k'^2}{k}$$

Tous les coefficients de la formule de transformation sont connus en fonction de K et de K'; elle s'écrit

$$Z^2 = \frac{K'^2}{K} \quad \frac{y^2(1-y^2)}{1-K'^2 y^2}$$

Reste à déterminer la relation entre K et K'

Pour cela je suppose que l'on fasse $u = \omega$ alors $Z = 1$ et y est donné par l'équation

$$\frac{y^2(1-y^2)}{1-K'^2 y^2} = \frac{K}{K'^2} \quad (4)$$

d'autre part si $u = \omega$, $\lambda u = \frac{\Omega}{2}$; et alors y est donné par l'équation

$$y^2 = \frac{1-y^2}{1-K'^2 y^2} \quad (5)$$ (voir cours de 2e année P. 148)

Identifiant les valeurs de $\frac{1-y^2}{1-K'^2 y^2}$ tirées des équations (4) et (5) il vient

$$y^2 = \frac{K}{K'^2 \ y^2}$$

$$y^2 = \frac{\sqrt{K}}{K'}$$

portant dans (4) il vient

$$\frac{\sqrt{K}}{K'} = \frac{1 - \frac{\sqrt{K}}{K'}}{1 - K' \ \sqrt{K}}$$

ou $\quad K - \frac{2\sqrt{K}}{K'} + 1 = 0$

ou encore $\quad K' = \frac{2\sqrt{K}}{1+K}$

C'est la relation inverse de celle de la transformation Lagrange

Remarque.- Jacobi a remarqué que si l'on fait successivement deux transformations inverses, c'est-à-dire deux transformations dans lesquelles le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ se trouve multiplié par deux facteurs inverses l'un de l'autre cela revient

à une multiplication de la fonction.

En effet on retombe d'abord sur le même module car on retombe évidemment sur le même rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ et qu'à une valeur donnée de ce rapport ne correspond qu'une valeur du module; en second lieu l'argument se trouve multiplié, en effet partant de l'argument u, la 1ère transformation conduit à l'argument λu avec les deux périodes $4m\lambda\omega$ et $2n\lambda\omega'$ (si le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ doit être multiplié par $\frac{m}{n}$); la 2e conduit à l'argument $\lambda\lambda' u$ avec les deux périodes $4mn\lambda\lambda'\omega$ et $2nm\lambda\lambda'\omega'$ ou en prenant un argument égal à u on a les deux périodes $4mn\omega$, $2mn\omega'$ et le même module K c'est donc la fonction primitive dont l'argument est multiplié par mn

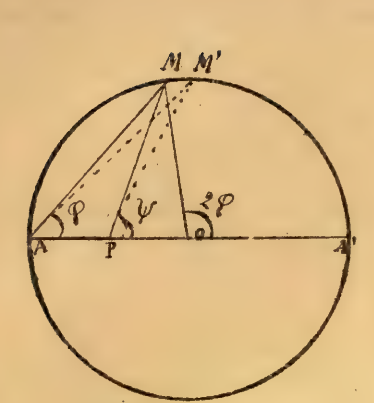
Si par exemple on effectue la transformation de Lagrange et celle que nous venons d'étudier cela revient à multiplier l'argument par deux sans changer le module.

21e Leçon.

Transformation des fonctions elliptiques. Transformation de Landen.

Transformation de Landen. — La transformation des fonctions elliptiques que nous avons étudiée dans la leçon précédente résulte d'une construction géométrique simple due à Landen.

Considérons un cercle de centre O; un point A de la circonférence, un point P du diamètre OA soit φ et ψ les angles de la droite AM joignant un point quelconque de la circonférence au point A



avec le diamètre O.A - Soit R le rayon de la circonférence a la distance OP ; si l'on remarque que l'angle MOA' est égal à 2 φ on a immé-diatement entre φ et ψ la relation

$$\frac{MO}{\sin MPO} = \frac{PO}{\sin PMO}$$

ou $$\frac{\sin \psi}{\sin(2\varphi - \psi)} = \frac{R}{a}$$

Pour trouver la relation entre les diffé-rentielles de φ et de ψ je déplace infiniment peu le point M, soit M' sa position nouvelle, $d\varphi$ et $d\psi$ les angles infiniments petits MAM' et MPM'

Dans le triangle MPM' on a $\frac{MM'}{MP} = \frac{\sin d\psi}{\sin PM'M}$ (1)

Or $MM' = 2 R d\varphi$

$MP = \sqrt{a^2 + R^2 - 2aR\cos(\pi - 2\varphi)}$

D'ailleurs MM' étant à la limite perpendicu-laire à OM, on a $PM'M = \frac{\pi}{2} + OMP$

donc $\sin PM'M = \cos(OMP) = \sqrt{1 - \sin^2 OMP}$

et dans le triangle OMP on a

$$\frac{\sin OMP}{\sin \psi} = \frac{a}{R} = K$$

Donc $\sin PM'M = \sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi}$

Portant dans (1) les valeurs de ces diverses expressions il vient

$$\frac{2Rd\varphi}{\sqrt{a^2 + R^2 + 2aR\cos.2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1 - K^2 \sin^2 \psi}}$$

Remplaçant $\cos. 2\varphi$ par $1 - 2\sin^2\varphi$ et posant

$$\frac{4aR}{(R+a)^2} = K'^2$$

cette formule devient

$$\frac{2R}{R+a} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K'^2 \sin^2\varphi}} = \frac{d\psi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2\psi}}$$

Posant

$$\sin\varphi = y$$

$$\sin\psi = x$$

et remarquant que $\dfrac{2R}{R+a} = \dfrac{2}{1+K}$

il vient

$$\frac{2}{1+K} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-K'^2 y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2 x^2}}$$

Si l'on remarque que φ et ψ et par suite x et y sont nuls en même temps et si l'on intègre ces deux expressions entre 0 et les valeurs correspondantes de x et y il vient entre les deux fonctions elliptiques de modules K et K' la relation

$$\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-K^2 x^2}} = \frac{2}{1+K} \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-K'^2 y^2}}$$

Les constantes K et K' sont respectivement définies par les équations

$$K = \frac{a}{R}$$

$$K'^2 = \frac{4aR}{(R+a)^2} = \frac{4\frac{a}{R}}{\left(1+\frac{a}{R}\right)^2} = \frac{4K}{(1+K)^2}.$$

D'où $K' = \dfrac{2\sqrt{K}}{1+K}.$

Pour trouver la relation algébrique, qui lie x et y il suffit de se reporter à la relation entre φ et ψ.

$$\frac{\sin\psi}{\sin(2\varphi-\psi)} = \frac{R}{a} = \frac{1}{K}$$

or $\sin(2\varphi-\psi) = \sin 2\varphi \cos\psi - \sin\psi \cos 2\varphi$

$= \sin.\varphi.\cos.\varphi.\cos.\psi. - \sin.\psi.(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = 2y\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} - x(1-2y^2)$

La relation précédente s'écrit donc encore

$$Kx = 2y\sqrt{1-y^2}\sqrt{1-x^2} - x(1-2y^2)$$

c'est une équation du premier degré en x^2, il vient en la résolvant

$$x^2 = \frac{4y^2(1-y^2)}{(K+1-2y^2)+4y^2(1-y^2)} = \frac{4y^2(1-y^2)}{(K+1)-4Ky^2} = \frac{\frac{4}{(K+1)^2}y^2(1-y^2)}{1-\frac{4K}{(K+1)^2}y^2}$$

Introduisant K' il vient

$$x^2 = \frac{\frac{K'^2}{K^2}y^2(1-y^2)}{1-K'^2y^2}.$$

C'est la transformation indiquée à la fin de la leçon précédente elle est inverse de celle de Lagrange

Echelle des modules.. Elle permet de ramener les fonctions de module K à celles d'un module plus grand

$$K' = \frac{2\sqrt{K}}{1+K}$$

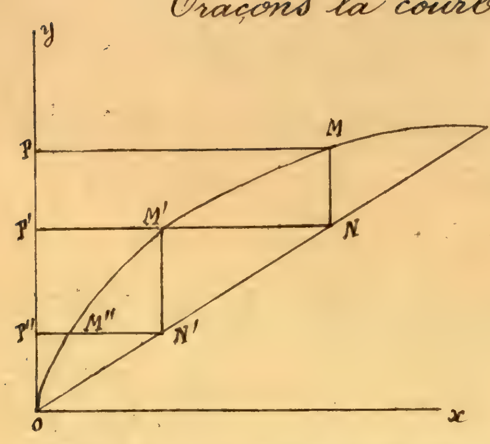
du module K' on pourra passer au module

$$K'' = \frac{2\sqrt{K'}}{1+K'}$$

et ainsi de suite les modules successifs K, K' K''... croissant rapidement; opérant en sens inverse on aura une suite de modules décroissant très rapidement.

On peut représenter graphiquement la loi de succession des modules de la manière suivante.

Traçons la courbe $y = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$



et prenons sur Oy une longueur OP égale à K, l'abscisse correspondante PM représentera K' (si nous supposons que l'on fait la transformation en sens inverse c'est-à-dire si l'on pose

$$K = \frac{2\sqrt{K'}}{1+K'}\Big)$$

, si maintenant nous portons une ordonnée OP' égale à PM, l'abscisse correspondante $P'M'$ représentera le troisième module K'' pour faire la construction il suffit d'abaisser de M la perpendiculaire MN à ox jusqu'à la rencontre en N de la droite à 45° ON, puis par le point N de mener NM' parallèle à Ox coupant Oy en P', $P'M'$ représente K'', du point M' on déduira de même un point M'' tel que $M''P''$ représente le 4e module K''' et ainsi de suite; on voit immédiatement sur la figure que les modules décroissent très rapidement; cela tient à ce que la courbe $y = \frac{2\sqrt{x}}{1+x}$ est tangente à Oy au point O.

On peut d'ailleurs étudier directement cette décroissance par le calcul

$$\text{posons } K' = \operatorname{tg}^2 \frac{\theta}{2}$$

$$\text{il vient } K = \frac{\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}} = \sin\theta$$

Donc si l'on part d'un module égal à $\sin\theta$ le module suivant sera égal à $\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$; en particulier si θ est petit on pourra confondre les sinus et les tangentes avec les arcs, et l'on passera d'un module égal à θ, à un module $\frac{\theta^2}{4}$; les modules décroîtront donc sensiblement comme la suite

$$\theta,\ \frac{\theta^2}{4}\quad \frac{\theta^4}{4^3}\quad \frac{\theta^8}{4^7}\ \text{-------}$$

qui décroît extrêmement vite si θ est plus petit que 1. En même temps que la transformation change le module, elle change la limite supérieure de l'intégration ; si l'on désigne par $\sin\varphi$ et $\sin\psi$ l'ancienne et la nouvelle limite on a entre elles la relation

$$\sin(2\varphi-\psi) = K\sin\psi$$

remplaçant $2\varphi-\psi$ par $\varphi+(\varphi-\psi)$ et ψ par $\varphi-(\varphi-\psi)$

il vient

$$\sin\varphi.\cos.(\varphi-\psi)+\sin(\varphi-\psi)\cos.\varphi = K\left[\sin\varphi.\cos.(\varphi-\psi)-\sin(\varphi-\psi)\cos\varphi\right]$$

ou $\qquad \operatorname{tg}\varphi+\operatorname{tg}(\varphi-\psi) = K\left[\operatorname{tg}\varphi-\operatorname{tg}(\varphi-\psi)\right]$

d'où on tire

$$\operatorname{tg}(\psi-\varphi) = \frac{1-K}{1+K}\operatorname{tg}\varphi$$

ou en posant $\qquad K = \operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$

$$\operatorname{tg}(\psi-\varphi) = \frac{1}{\cos.\theta}\operatorname{tg}\varphi$$

Dans cette transformation u se trouve multiplié par le facteur $\lambda = \dfrac{R+a}{2R} = \dfrac{1+K}{2}$

et l'on a

$$\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-K'^2\sin^2\varphi}} = \frac{1+K}{2}u$$

en posant $u = \displaystyle\int_0^{\psi}\frac{d\psi}{\sqrt{1-K^2\sin^2\psi}}$

La période réelle de la fonction de module K est définie

par $\omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \psi}}$

celle de la fonction de module K' par

$$\Omega = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K'^2 \sin^2 \varphi}}$$

Pour trouver la relation qui lie ω et Ω je remarque que lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ψ est égal à π comme le font voir soit la formule soit la figure; on a donc

$$\frac{2}{1+K} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-K'^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^{\pi} \frac{d\psi}{\sqrt{1-K^2 \sin^2 \psi}}$$

ou $\frac{2}{1+K} \Omega = 2\omega$

$$\omega = \frac{\Omega}{1+K}$$

Problème. – Proposons-nous de chercher une transformation telle que le rapport $\frac{\omega}{\omega'}$ soit divisé par trois.

Soit $z = \sin.\mathrm{am}.\, u$ la fonction dont nous partons, ayant pour module K; soit λ le facteur par lequel u se trouve multiplié dans la transformation posons $y = \sin.\mathrm{am}.(\lambda u)$ le module de cette nouvelle fonction étant K' – On voit immédiatement comme dans les exemples de la précédente leçon que lorsque z est donné il y a 3 valeurs pour y, mais que y étant donné z est parfaitement déterminé; la formule de transformation sera donc de la forme

$$z = \frac{A + By + Cy^2 + Dy^3}{A' + B'y + C'y^2 + D'y^3}$$

Les variables z et y sont nulles en même temps A est donc nul, de plus lorsque y est infini z l'est aussi, donc D' est nul; lorsque l'on change y en $-y$, z doit

se changer en $-z$ on a donc encore $C=0$ et $B'=0$; ces remarques nous permettent de ramener la formule de transformation à la forme

$$z = \frac{ay + by^3}{1 + \mathfrak{b}y^2}.$$

Pour calculer a, b, $\mathfrak{b}$ en fonction de K et K' et la relation qui lie K et K' nous allons comme dans les exemples précédents donner à u des valeurs particu-lières.

Si l'on donne successivement à u les valeurs u et $u + 3\omega' i$, on a pour z les deux valeurs z et $\frac{1}{Kz}$; les valeurs correspondantes de λu sont

$$\lambda u \text{ et } \lambda u + \Omega' i$$

correspondant aux deux valeurs y et $\frac{1}{K'y}$ du sinus amplitude.

La formule de transformation doit donc se reproduire identiquement lorsque l'on change z en $\frac{1}{Kz}$ et y en $\frac{1}{K'y}$; mais elle devient

$$\frac{1}{Kz} = \frac{\frac{a}{K'y} + \frac{b}{K'^3 y^3}}{1 + \frac{\mathfrak{b}}{K'^2 y^2}}$$

ou $$Kz = \frac{K'^3 y^3 + \mathfrak{b} K' y}{a K'^2 y^2 + b}$$

cette formule doit être identique à

$$z = \frac{ay + by^3}{1 + \mathfrak{b} y^2}$$

identifiant il vient

$$\frac{K'^3}{Kb} = b$$

$$\frac{\mathfrak{b} K'}{Kb} = a$$

$$\frac{a K'^2}{b} = \mathfrak{b}$$

Ces relations se réduisent à deux distinctes seulement; on en déduit

$$b = \frac{K'^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$

et $\quad h = a\, K^{\frac{1}{2}}\, K'^{\frac{1}{2}}$

si l'on fait $z=1$ ce qui correspond à

$$u = (2n+1)\,\omega + 2m\omega' i$$

il y aura pour y trois valeurs différentes, car on a pour u les valeurs

$$\lambda u = (2n+1)\,\Omega + \frac{2m}{3}\,\Omega' i$$

si m est multiple de 3, y est égale à l'unité si m est multiple de 3 plus ou moins 1, y a des valeurs égales car la somme des arguments est égale à $2\,\Omega$ plus un multiple des périodes

L'équation qui fait connaître y lorsque $z=1$ est

$$b y^3 + a y - h y^2 - 1 = 0.$$

exprimant qu'elle admet la racine 1, il vient

$$b + a - h - 1 = 0$$

divisant par $(y-1)$ il reste l'équation

$$b y^2 - a y + y + 1 = 0$$

exprimant que cette équation a une racine double il vient la condition

$$(1-a)^2 = 4b.$$

Remplaçant, h et b en fonction de a, K et K' dans ces deux dernières relations il vient les deux équations

$$\frac{K'^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} + a - a\,K^{\frac{1}{2}}\,K'^{\frac{1}{2}} - 1 = 0.$$

$$(1-a)^2 = \frac{4\,K'^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}}$$

De la 1ère on déduit immédiatement

$$a = \frac{\frac{K'^{\frac{3}{2}}}{K^{\frac{1}{2}}} - 1}{K^{\frac{1}{2}}\, K'^{\frac{1}{2}} - 1}$$

Portant dans la seconde il vient la relation entre K et K'

22e Leçon.

Etude des équations différentielles.

Equations différentielles du premier ordre.

Condition d'intégrabilité de $(Mdx + Ndy + Pdz)$.-

Nous avons vu (cours de 2e année P 64) que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une différentielle de la forme $(Mdx + Ndy)$ soit intégrable est $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$

Proposons nous de chercher de même la condition pour qu'une différentielle à 3 variables

$Mdx + Ndy + Pdz$ soit intégrable c'est-à-dire soit la différentielle exacte d'une fonction u des 3 variables x, y, z ; la fonction u est définie par les 3 relations

$$\frac{du}{dx} = M$$

$$\frac{du}{dy} = N$$

$$\frac{du}{dz} = P$$

Il n'existe généralement pas de fonction u satisfaisant à ces 3 équations —, s'il elle existe en raison de la première équation, elle sera de la forme

$$u = \int_{x_0}^{x} M\,dx + F(yz)$$

x_0 étant une constante arbitraire

Exprimant que la fonction u satisfait aux deux autres équations il vient

$$N = \frac{dF}{dy} + \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx$$

$$P = \frac{dF}{dz} + \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dz$$

La fonction F est alors définie par ses deux dérivées partielles ; pour qu'elle existe il faut et suffit que ces deux dérivées partielles soient bien des fonctions de y et de z seuls (puisque par hypothèse F est indépendant de x) et satisfassent à la condition

$$\frac{d^2F}{dz\,dy} = \frac{d^2F}{dy\,dz}$$

Or on a

$$\frac{dF}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dy}\,dx$$

$$\frac{dF}{dz} = P - \int_{x_0}^{x} \frac{dM}{dz}\,dx$$

Exprimant que ces expressions sont indépendantes de x c'est-à-dire que leurs dérivées par rapport à x sont nulles il vient les deux conditions nécessaires

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy} \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dM}{dz} \quad (2)$$

Ces conditions étant satisfaites les expressions des dérivées de F peuvent s'écrire

$$\frac{dF}{dy} = N - \int_{x_0}^{x} \frac{dN}{dx}\, dx = N_0$$

$$\frac{dF}{dz} = P_0$$

N_0 et P_0 représentant les fonctions de y et de z que l'on obtient en remplaçant x par x_0 dans les fonctions N et P

La condition $\frac{d^2F}{dy\,dz} = \frac{d^2F}{dz\,dy}$ devient

$$\frac{d(N_0)}{dz} = \frac{d(P_0)}{d.y.}$$

x_0 étant absolument arbitraire cette dernière condition équivaut à

$$\frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy} \quad (3)$$

Les conditions (1) (2) (3) sont donc nécessaires comme cela était évident à priori, et l'analyse précédente montre qu'elles sont suffisantes et fait voir comment l'on peut déterminer la fonction u lorsqu'elles sont remplies.

Ces calculs peuvent évidemment être reproduits identiquement dans le cas d'une differentielle à n variables

$$M_1\, dx_1 + M_2\, dx_2 - - + M_i\, dx_i - - M_n\, dx_n.$$

La condition d'intégrabilité est évidemment que l'on ait

$$\frac{dM_i}{dx_j} = \frac{dM_j}{dx_i}$$

quelque soient i et j

Equations différentielles du premier ordre.

On appelle équation différentielle du premier ordre une relation entre une variable x, une fonction y de

cette variable, et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ de celle-ci, toute équation différentielle peut se mettre sous l'une des formes

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ou, en résolvant,

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, y)$$

ou encore

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

M et N étant deux fonctions de x et de y.

Il ne faut pas confondre le problème de l'intégration d'une telle équation différentielle qui consiste à chercher les fonctions y de x qui satisfont à cette équation considérée sous l'une ou l'autre des trois formes précédentes, problème qui est toujours possible, avec le problème que nous avons étudié précédemment qui consiste à chercher une fonction de deux variables x et y admettant pour différentielle totale $M\,dx + N\,dy$ et qui n'est généralement pas possible.

Ces deux problèmes sont cependant liés de la manière suivante : lorsque la différentielle $M\,dx + N\,dy$ est différentielle exacte de la fonction $F(x\,y)$ on a immédiatement la solution de l'équation différentielle $M\,dx + N\,dy = 0$ elle est donnée par $F(x\,y) = C^{te}$, d'où l'on déduit y en fonction de x et de la constante arbitraire.

Théorème. – Toute équation différentielle linéaire admet une infinité de solutions, données par une fonction déterminée de la variable et d'une constante arbitraire.

Ce théorème a été démontré pour la première fois par Cauchy d'une manière rigoureuse. Nous l'admettons mais nous allons montrer comment on peut le prévoir par des considérations géométriques.

Si je considère x et y comme deux coordonnées toute

fonction y de x représentera une courbe et la dérivée $\frac{dy}{dx}$ le coefficient angulaire de la tangente à cette courbe. Alors l'équation différentielle proposée définit en chaque point du plan la direction d'une tangente à une courbe. Si donc je prends un point arbitrairement dans le plan je connaîtrai la direction d'une courbe passant en ce point et satisfaisant à l'équation donnée; prenant sur la tangente ainsi définie un point voisin j'aurai une nouvelle tangente et ainsi de suite: j'obtiendrai ainsi à partir du point choisi une courbe définissant une fonction de x satisfaisant à l'équation différentielle donnée; comme le point de départ est arbitraire l'équation de cette courbe contient évidemment un paramètre arbitraire permettant de la faire passer par un point quelconque du plan.

Nous admettons donc étant donné une équation différentielle du premier ordre qu'elle admet une solution de la forme

$$y = \varphi(x, C)$$

ou $$F(x, y, C) = 0.$$

c'est ce que l'on appelle la solution générale de l'équation

On peut encore en résolvant par rapport à C la mettre sous la forme $C = f(xy)$

Réciproque.-

Je dis que étant donné une fonction d'une variable et d'une constante arbitraire définie par $y = \varphi(x, C)$ ou bien par $F(x, y, C) = 0$.

x, y et $\frac{dy}{dx}$ satisfont à une équation et à une seule ne contenant pas la constante C.

En effet différiant l'équation $F = 0$ il vient

$$\frac{dF}{dx}\,dx + \frac{dF}{dy}\,dy = 0$$

Eliminant C entre cette équation et l'équation $F=0$; il vient une équation différentielle

$$f\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

ne contenant plus la constante C, cette équation est évidemment unique ; car s'il en existait une autre entre x, y et $\frac{dy}{dx}$ ne contenant pas C, en éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre celle-ci et la précédente on arriverait à déduire de l'équation $F(x, y, C) = 0$ une relation entre x et y ne contenant plus la constante C ce qui est absurde.

Facteur d'intégrabilité.

Théorème. – Étant donné une équation différentielle du 1er ordre $M\,dx + N\,dy = 0$ il existe toujours un facteur μ tel qu'en multipliant le premier membre de l'équation par ce facteur celui-ci devienne une différentielle exacte.

En effet soit $F(x\,y\,C)$ la solution générale de l'équation différentielle proposée ; je la mets sous la forme

$$C = \varphi(x, y)$$

différentiant l'élimination de la constante se fait d'elle-même ; il vient

$$\frac{d\varphi}{dx}\,dx + \frac{d\varphi}{dy}\,dy = 0$$

Telle est l'équation différentielle à laquelle satisfait la solution générale considérée ; elle doit être identique à la proposée ; on doit donc avoir

$$\frac{\frac{d\varphi}{dx}}{M} = \frac{\frac{d\varphi}{dy}}{N} = \mu$$

le facteur μ est précisément le facteur cherché puisque M et N multipliés par ce facteur deviennent des dérivées partielles.

Il existe toujours une infinité de facteurs d'intégrabilité pour une même équation différentielle ; en effet soit μ un facteur qui rende la différentielle intégrable (facteur d'intégrabilité) ; par définition l'expression $\mu M dx + \mu N dy$ est une différentielle exacte du d'une certaine fonction u de x et de y ; multipliant par une fonction arbitraire de u, $f(u)$ il vient

$$\mu f(u) M dx + \mu f(u) N dy = f(u) du$$

$f(u) du$ est une différentielle exacte (celle de $F(u) = \int f(u) du$)

donc le facteur $\mu f(u)$ est encore un facteur d'intégrabilité —

La fonction f étant arbitraire, il y en a une infinité.

D'ailleurs un facteur d'intégrabilité μ étant donné qui rend le premier membre égal à du, tout autre facteur d'intégrabilité est de la forme $\mu . f(u)$.

En effet soit

$$M\mu\, dx + N\mu\, dy = du \quad (1)$$

et soit un deuxième facteur d'intégrabilité μ' il peut toujours être mis sous la forme μK alors on aura

$$\mu K M dx + \mu K N dy = dV$$

mais en raison de l'équation (1) le 1er membre de celle-ci est égal à $K du$; on a donc

$$K du = dV$$

D'autre part l'équation proposée admet comme solution générale soit $u =$ constante soit $V =$ constante ; donc u et V sont constants en même temps et l'on a $V = \varphi(u)$, d'où $dV = \varphi'(u) du$

on a par conséquent

$$K = \varphi'(u)$$

et par suite $\mu' = \mu\,\varphi'(u)$, ce qui est bien de la forme $\mu f(u)$

Exemple.- Soit l'équation

$$x\,dy - y\,dx = 0$$

elle n'est pas directement intégrable, mais divisant par x^2 il vient

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

D'où $\frac{y}{x}$ = constante

On peut encore diviser par x^2+y^2; il vient

$$\frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2} = d\left(\text{arc.tg.}\frac{y}{x}\right) = 0$$

D'où $\text{tg}\frac{y}{x}$ = constante

Divisant par xy, il vient

$$\frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = d(\text{L}.y) - d(\text{L}.x) = 0$$

D'ou $\text{L}\left(\frac{y}{x}\right)$ = constante

On a employé ainsi les trois facteurs d'intégrabilité successifs $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^2+y^2}$, $\frac{1}{xy}$ qui sont bien tous égaux à l'un d'entre eux multiplié par une certaine fonction de $\frac{y}{x}$.

Equation différentielle à deux variables indépendantes.

Considérons une équation différentielle entre trois variables $x.y.z.$ et leurs différentielles $dx.dy.dz$; proposons nous de chercher si, comme dans le cas où il n'y avait que deux variables, cela implique une relation entre les variables et une constante arbitraire -

Soit $M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$

la relation donnée ; s'il existe une solution de la forme $F(xyz)=0$, elle représente une surface ayant pour normale en chaque point une droite dont les cosinus directeurs sont respectivement proportionnels à M, N, P ; l'équation proposée détermine donc la normale en chaque point de l'espace aux surfaces qui pourraient satisfaire à l'équation différentielle proposée ; et il peut sembler au premier abord que par chaque point de l'espace il doive passer une telle surface (de même que dans le plan par chaque point du plan passe une courbe satisfaisant à une équation différentielle donnée)

Or ceci n'est pas exact (comme nous l'avons montré cours de première année 27ème Leçon) un système de droites quelconque ne constitue pas les normales à une surface ; par suite une équation différentielle quelconque de la forme $Mdx+Ndy+Pdz$ n'est pas intégrable.

On peut établir ce résultat par le calcul de la manière suivante : s'il existait une intégrale il existerait un facteur d'intégrabilité μ tel que $\mu Mdx+\mu Ndy+\mu Pdz$ soit une différentielle exacte ; on aurait donc :

$$\frac{d(\mu M)}{dy}=\frac{d(\mu N)}{dx}$$

$$\frac{d(\mu N)}{dz}=\frac{d(\mu P)}{dy}$$

$$\frac{d(\mu P)}{dx}=\frac{d(\mu M)}{dz}$$

ou en développant

$$\mu\left(\frac{dM}{dy}-\frac{dN}{dx}\right)=N\frac{d\mu}{dx}-M\frac{d\mu}{dy}$$

$$\mu\left(\frac{dN}{dz}-\frac{dP}{dy}\right)=P\frac{d\mu}{dy}-N\frac{d\mu}{dz}$$

$$\mu\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dM}{dz}\right)=M\frac{d\mu}{dz}-P\frac{d\mu}{dz}$$

multipliant ces trois équations respectivement par P, M, N et ajoutant, il vient

$$\mu\left[N\frac{dP}{dz}-P\frac{dN}{dx}+P\frac{dM}{dy}-M\frac{dP}{dy}+M\frac{dN}{dx}-N\frac{dM}{dz}\right]=0$$

Comme nous supposons μ différent de 0 cela implique une relation entre les fonctions M, N, P que nous avons supposées absolument arbitraires, donc il n'existe généralement pas de facteur d'intégrabilité.

Intégration de $M\,dx + N\,dy = 0$, Recherche du facteur μ.

Si nous revenons à une équation à une seule variable indépendante, il existe toujours un facteur d'intégrabilité ; et lorsque ce facteur est connu, l'intégration de l'équation différentielle est ramenée à l'intégration d'une différentielle exacte, c'est-à-dire à de simples quadratures. Il semble donc qu'il faille toujours chercher d'abord le facteur d'intégrabilité μ ; mais dans le cas général c'est un problème plus compliqué que le problème primitif. En effet μ est défini par cette condition que $\mu M\,dx + \mu N\,dy$ soit une différentielle exacte, c'est-à-dire par la condition

$$\frac{d(\mu M)}{dy} = \frac{d(\mu N)}{dx}$$

ou $$\mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) + M\frac{d\mu}{dy} - N\frac{d\mu}{dx} = 0$$

on a donc pour déterminer une fonction μ de deux variables une relation entre la fonction et ses deux dérivées, au lieu d'avoir, comme dans le problème primitif, à déterminer une fonction d'une variable par une relation entre la variable, la fonction et sa dérivée première

---

Cas particuliers. – Si la fonction μ ne peut pas être déterminée dans le cas général, elle peut l'être au contraire dans certains cas particuliers, par exemple si l'on sait que μ est fonction d'une certaine fonction de x et de y. On peut par exemple trouver μ s'il ne doit être fonction que de x en effet il est alors défini par l'équation

$$\mu\left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}\right) = N\frac{d\mu}{dx}$$

qui est résolue par une simple intégration si $\dfrac{\dfrac{dM}{dy} - \dfrac{dN}{dx}}{N}$ est bien indépendant de y

Equation linéaire du premier ordre.

Ce dernier cas se présente par exemple pour une équation linéaire du premier ordre, c'est-à dire une équation dans laquelle y et $\dfrac{dy}{dx}$ ne figurent qu'au premier degré ; elle est alors de la forme

$$F(x)\frac{dy}{dx} + \varphi(x)\,y + \psi(x) = 0$$

ou encore de la forme

$$P\,dy + (Qy+R)\,dx = 0$$

P, Q, R étant des fonctions de x

Pour qu'il y ait un facteur μ fonction de x il faut que

$$\frac{\dfrac{d(Qy+R)}{dy} - \dfrac{dP}{dx}}{P}$$ soit fonction de x seul, ce qu'est bien réalisé car cette expression s'écrit encore $\dfrac{Q - \dfrac{dP}{dx}}{P}$; μ est alors défini par la condition

$$\frac{\dfrac{d\mu}{dx}}{\mu} = \frac{Q - \dfrac{dP}{dx}}{P}$$

on en déduit en intégrant

$$L\mu = \int \frac{Q}{P}\,dx - L(P)$$

D'où

$$\mu = \frac{1}{P}\,e^{\int \frac{Q}{P}\,dx}$$

multipliant par ce facteur l'équation devient

$$e^{\int \frac{Q}{P} dx} dy + (Qy+R)\frac{1}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dx} dx = 0$$

ou $e^{\int \frac{Q}{P} dx} \left(dy + \frac{Q}{P} y\, dx\right) = -\frac{R}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dx} dx$

le premier membre est la différentielle de

$y e^{\int \frac{Q}{P} dx}$ quant au deuxième il ne contient que x il est donc intégrable

Intégrant il vient

$$y e^{\int \frac{Q}{P} dx} + \int \frac{R}{P} e^{\int \frac{Q}{P} dx} dx = 0$$

Telle est l'intégrale générale de l'équation proposée comme il y figure deux intégrations il semble qu'il y ait deux constantes arbitraires mais on constate aisément qu'elles se réduisent à une ; d'ailleurs il n'était pas nécessaire d'en introduire une dans la première intégration car celle-ci doit nous fournir un facteur d'intégrabilité quelconque et non pas tous les facteurs.

23e Leçon.

Recherche du facteur d'intégrabilité. Exemples d'intégration – Equation homogène.

Théorème. – On peut trouver le facteur d'intégrabilité toutes les fois que l'on sait à l'avance qu'il est fonction d'une fonction connue u de x

En effet soit l'équation donnée

$$M dx + N dy = 0$$

et $\mu = f(u)$ le facteur d'intégrabilité ; la condition nécessaire et suffisante qui définit μ est

$$\frac{d\mu M}{dy} = \frac{d\mu N}{dx}$$

ou

$$\mu \frac{dM}{dy} + M \frac{d\mu}{du} \frac{du}{dy} = \mu \frac{dN}{dx} + N \frac{d\mu}{du} \frac{du}{dx}$$

Cette équation qui doit définir μ s'écrit

$$\frac{d\mu}{du}\left(M \frac{du}{dy} - N \frac{du}{dx}\right) = \mu\left(\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy}\right)$$

elle définit le rapport $\frac{d\mu}{du}$ qui doit être uniquement fonction de u pour que le problème soit possible ; s'il en est ainsi on a

$$\frac{\frac{d\mu}{du}}{\mu} = F(u)$$

D'où $L(\mu) = \int F(u)\, du$

μ étant ainsi donné par une quadrature on sait que le problème de l'intégration de l'équation différentielle donnée se ramène à de simples quadratures.

Cas où l'on connaît plusieurs facteurs d'intégrabilité.

Supposons que l'on connaisse deux facteurs d'intégrabilité différents μ_1 et μ_2

Par hypothèse

$$\mu_1 M dx + \mu_1 N dy$$

et $\mu_2 M dx + \mu_2 N dy$ sont deux différentielles exactes ; soit du la première d'entre elles on sait que le rapport $\frac{\mu_2}{\mu_1}$ est nécessairement fonction de u ; or l'intégrale générale de l'équation proposée est u = constante, ou bien encore $f(u) = C^{te}$, f étant une fonction quelconque on peut donc prendre comme intégrale générale

$$\frac{\mu_2}{\mu_1} = \text{constante}.$$

Exemple. – Soit l'équation différentielle

$$(3x+2y)\,dx + x\,dy = 0$$

c'est une équation linéaire donc elle admet un facteur d'intégrabilité fonction de x soit X : il est défini par la condition

$$\frac{d}{dy}(3x+2y)X = \frac{d}{dx}\,X\,x$$

ou

$$2X = x\frac{dX}{dx} + X$$

$$\frac{\frac{dX}{dx}}{X} = \frac{1}{x}$$

$$L(X) = L\,x$$

$$X = C\,x$$

Il est aisé de reconnaître qu'il existe aussi un facteur d'intégrabilité fonction de $\frac{y}{x}$, soit $\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ ce facteur ; il est défini par la condition

$$\frac{d}{dy}\left[\varphi\cdot(3x+2y)\right] = \frac{d}{dx}(x\cdot\varphi).$$

ou

$$\frac{1}{x}\varphi'(3x+2y) + 2\varphi = \varphi + x\cdot\left(\frac{-y}{x^2}\right)\varphi'$$

ou

$$\varphi = \varphi'\left(-3 - 3\,\frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{-1}{3\left(\frac{y}{x}+1\right)}$$

$$L\,\varphi = L\,\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{y}{x}+1}}$$

$$\varphi = \frac{K}{\sqrt[3]{\left(\frac{y}{x}\right)+1}} = K\sqrt[3]{\frac{x}{x+y}}$$

La remarque précédente nous fait immédiatement connaître l'intégrale de l'équation proposée

c'est $\dfrac{x}{\sqrt[3]{\frac{x}{(x+y)}}}$ = constante

ou $x^{\frac{2}{3}}\,(x+y)^{\frac{1}{3}}$ = constante

ou encore $x^2\,(x+y)$ = constante

Méthode pour trouver un facteur d'intégrabilité.

La méthode suivante permet dans certains cas de trouver un facteur d'intégrabilité : on groupe les termes de l'équation proposée de manière à diviser le premier membre en deux autres de même forme : on aura de la sorte

$$M\,dx + N\,dy = (m\,dx + n\,dy) + (m'\,dx + n'\,dy)$$

le groupement aura été fait de manière que l'on puisse trouver un facteur d'intégrabilité de chacune des deux différentielles mises en évidence ; ayant ainsi un facteur d'intégrabilité pour chacune d'elles on considérera la forme générale de chacun de ces facteurs ; et on cherchera un facteur qui unira à la fois

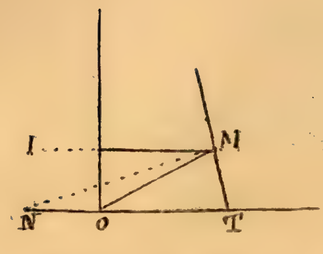
dans chacune de ces deux formes générales ; ce sera alors évidemment un facteur d'intégrabilité de l'équation proposée. Si nous reprenons l'équation précédente elle peut s'écrire

$$3(x+y)dx + (xdy - ydx) = 0$$

La différentielle $3(x+y)dx$ admet évidemment le facteur d'intégrabilité $\mu = \frac{1}{x+y}$; l'intégrale est alors $3x$ = constante et par conséquent la forme générale du facteur est $\frac{F(x)}{x+y}$; la différentielle $xdy - ydx$ admet le facteur $\mu = \frac{1}{x^2}$, l'intégrale étant alors $\frac{y}{x}$ = constante, la forme générale du facteur est $\frac{1}{x^2} F\left(\frac{y}{x}\right)$; c'est là une fonction homogène de y et de x de degré -2 en x ; le 1er facteur rentrera dans cette forme, si l'on prend $F(x)$ fonction homogène de x et de degré -1 c'est à dire $F(x) = \frac{1}{x}$, donc $\frac{1}{x(x+y)}$ sera un facteur intégrant de l'équation différentielle proposée. Ceci fait connaître un troisième facteur pour cette même équation, et l'on en obtiendra la solution générale en égalant à une constante le quotient de deux quelconques d'entre ces facteurs.

Problème — Proposons nous de chercher quelle est la courbe sur laquelle doit se réfléchir un faisceau de rayons lumineux parallèles pour que les rayons convergent en un point après réflexion.

Prenons comme origine d'un système rectangulaire le point de convergence des rayons réfléchis et comme axe des x une parallèle au rayon incident. Soit M un point de la courbe IM le rayon incident OM le réfléchi MN la normale MT la tangente



la condition nécessaire et suffisante pour que OM soit bien le rayon refléchi de IM. est que le triangle M.O.T. soit isocèle
or $OM = \sqrt{x^2+y^2}$

et $OT = x - y \dfrac{dx}{dy}$

la courbe cherchée est donc définie par l'équation différentielle

$$\sqrt{x^2+y^2} = x - y \frac{dx}{dy}$$

Pour intégrer cette équation je vais chercher à appliquer la méthode précédente ; pour cela je l'écris

$$(y\,dx - x\,dy) + dy\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

le premier élément admet le facteur d'intégrabilité $\frac{1}{y^2}$, et plus généralement le facteur $\frac{1}{y^2} f\left(\frac{y}{x}\right)$, ce qui est la forme générale d'une fonction homogène de degré -2 en y le deuxième élément admet évidemment le facteur $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et la forme générale de son facteur d'intégrabilité est $\dfrac{F(y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$; pour l'identifier à la forme précédente il suffit de prendre $F(y) = \frac{1}{y}$; alors $\dfrac{1}{y\sqrt{x^2+y^2}}$ est un facteur pour l'équation proposée ; la multipliant par ce facteur il vient

$$\frac{dy}{y} + \frac{y\,dx - x\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$$

ou $$\frac{dy}{y} + \frac{\frac{y\,dx - x\,dy}{y^2}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}} = 0$$

Si on pose $\frac{y}{x} = u$; il vient

$$\frac{dy}{y} + \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = 0$$

l'intégration est immédiate ; elle donne

$$Ly + L(u + \sqrt{1+u^2}) = \text{constante}$$

ou $\quad y\left(\frac{x}{y} + \sqrt{1+\frac{x^2}{y^2}}\right) = c$

c'est-à-dire

$$x + \sqrt{x^2+y^2} = c$$

C'est l'équation d'une parabole ayant $O.x.$ pour axe et O pour foyer

Equation linéaire du premier ordre. – Nous avons montré dans la dernière leçon comment l'on peut intégrer l'équation linéaire du premier ordre en cherchant un facteur d'intégrabilité fonction de x ; on peut encore l'intégrer ainsi qu'il suit. –

Soit l'équation donnée

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

Je pose $\quad y = uv$

substituant il vient

$$u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx} + Puv + Q = 0 \quad (1)$$

L'un des deux facteurs u et v est évidemment arbitraire je détermine v par la condition

$$u\frac{dv}{dx} + Puv = 0$$

c'est-à-dire

$$\frac{\frac{dv}{dx}}{v} = P$$

D'où $v = e^{-\int P dx}$

l'équation se réduit alors à

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q}{v} = Qe^{+\int P dx}$$

et $u = \int Qe^{\int P dx} dx$

Par suite
$$y = uv = \int Qe^{\int P dx} dx \times e^{-\int P dx}$$

Telle est l'intégrale générale cherchée, elle est identique à celle trouvée par l'autre méthode, elle paraît aussi contenir deux constantes, mais il n'y en a en réalité qu'une ; d'ailleurs on peut n'en pas introduire dans la valeur de v, car on ne cherche pas tous les facteurs v mais seulement un d'entre eux permettant la simplification de l'équation

---

Equation de Bernouilli.

L'équation

$$\frac{dy}{dx} + Py + Qy^n = 0$$

où P et Q sont des fonctions de x se ramène immédiatement à l'équation linéaire ; en effet elle peut s'écrire

$$\frac{\frac{dy}{dx}}{y^n} + \frac{P}{y^{n-1}} + Q = 0$$

Posant $\dfrac{1}{y^{n-1}} = u$

on a $\dfrac{du}{dx} = (1-n) y^{-n} \dfrac{dy}{dx}$

l'équation précédente devient

$$\frac{du}{dx} + (1-n) Pu + (1-n) Q = 0.$$

c'est une équation linéaire en u; elle fait immédiatement connaître u et par suite y

---

Equation $\frac{dy}{dx} + Ry^2 + Py + Q = 0$

Si l'on considère l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Ry^2 + Py + Q = 0$$

où P, Q, R sont des fonctions de x, on ne sait pas l'intégrer dans le cas général mais elle jouit de cette propriété très remarquable que si l'on en connaît une solution on peut en déduire la solution générale.

En effet soit $y = u$, une solution particulière et $y = u + z$ la solution générale on aura simultanément

$$\frac{du}{dx} + Ru^2 + Pu + Q = 0$$

et $$\frac{du}{dx} + \frac{dz}{dx} + R(u^2 + z^2 + 2uz) + P(u+z) + Q = 0$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} + Rz^2 + (2Ru + P)z = 0.$$

c'est là une équation de Bernoulli, on peut donc trouver la forme générale de z et par suite celle de y; pour obtenir z il faudra prendre pour inconnue auxiliaire $\frac{1}{z^{n-1}} = \frac{1}{z}$ dans le cas présent $\frac{1}{z}$ est alors défini par une équation linéaire; si donc l'on avait posé immédiatement $y = u + \frac{1}{z_1}$ la nouvelle inconnue z_1 eut été définie par une équation linéaire.

Equation homogène.-

Considérons une équation différentielle

$$Mdx + Ndy = 0$$

dans laquelle M et N sont deux fonctions homogènes de x et de y et de même degré ; c'est-à-dire telles que l'on ait

$$M = x^m f\left(\frac{y}{x}\right)$$
$$N = x^m \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Au lieu de considérer la fonction y de x, je considère la fonction $z = \frac{y}{x}$

On aura $y = zx$ et $dy = z\,dx + x\,dz$

Faisant le changement de variables dans l'équation différentielle donnée il vient

$$x^m f(z)\,dx + x^m \varphi(z)(z\,dx + x\,dz)$$

ou $$\frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z)\,dz}{f(z) + \varphi(z)\,z} = 0$$

D'ou en intégrant

$$Lx + \int \frac{\varphi(z)\,dz}{f(z) + z\varphi(z)} = \text{constante}$$

On déduit immédiatement de là z et par suite y en fonction de x

Il est aisé de faire cette intégration sans changement de variables. Il suffit de remarquer que pour arriver à une équation intégrable nous n'avons pas fait autre chose que de diviser successivement le premier membre de l'équation par x^m, par x et par $f(z) + z\varphi(z)$; c'est-à-dire encore par le produit

$$x^{m+1}\left[f(z) + z\varphi(z)\right] = Mx + Ny$$

Nous avons donc mis l'équation proposée sous la forme

$$\frac{M\,dx}{Mx + Ny} + \frac{N\,dy}{Mx + Ny} = 0$$

le premier membre est alors une différentielle exacte.

En effet

$$\frac{d}{dy}\,\frac{M}{(Mx+Ny)} = \frac{(Mx+Ny)\frac{dM}{dy} - M\left[x\frac{dM}{dy}+N+y\frac{dN}{dy}\right]}{(Mx+Ny)^2}$$

$$\frac{d}{dx} = \frac{N}{Mx+Ny} = \frac{(Mx+Ny)\frac{dN}{dx} - N(x\frac{dM}{dx}+M+y\frac{dN}{dx}}{(Mx+Ny)^2}$$

Egalant ces deux dérivées il vient toutes réductions faites

$$N\left(y\frac{dM}{dy}+x\frac{dM}{dx}\right) = M\left(y\frac{dN}{dy}+x\frac{dN}{dx}\right)$$

Cette équation est toujours satisfaite car

$$x\frac{dM}{dx}+y\frac{dM}{dy} = mM$$

m étant le degré d'homogénéité de M (théorème des fonctions homogènes)

et $x\frac{dN}{dx}+y\frac{dN}{dy} = mN$; m ayant la même valeur puisque M et N sont deux fonctions homogènes du même degré

Applications. Si nous reprenons l'équation différentielle

$$(3x+2y)\,dx + x\,dy = 0$$

elle est homogène ; elle admet donc comme facteur d'intégrabilité

$$\frac{1}{(3x+2y)x+xy} = \frac{1}{3x(x+y)}$$

si l'on y joint le facteur x qui est immédiatement indiqué par la règle relative aux équations linéaires on voit que l'intégrale de l'équation est

$$x^2(x+y) = \text{constante}.$$

Reprenons encore l'équation différentielle relative au problème du miroir parabolique

$$\sqrt{x^2+y^2}\,dy + x\,dy - y\,dx = 0$$

elle est homogène ; elle sera donc rendue intégrable par multiplication par le facteur

$$\frac{1}{y(x+\sqrt{x^2+y^2}) - xy} = \frac{1}{y\sqrt{x^2+y^2}}\text{ ; c'est précisément}$$

là le facteur que nous avons employé.

Dans ce problème de géométrie on a donc été conduit à une équation différentielle homogène - Cela a lieu toutes les fois que les courbes qui répondent au problème sont semblables entre elles et ont pour centre de similitude l'origine

En effet en deux points homologues de deux de ces courbes la direction de la tangente est la même,

la valeur de $\frac{dy}{dx}$ est donc aussi la même, et

cela pour des points homologues, c'est-à-dire situés sur un même vecteur et répondant à une même valeur de $\frac{y}{x}$: donc $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{y}{x}$ sont constants en même temps ; on a donc $\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$

ou
$$dy - dx\,F\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

multipliant par un facteur quelconque on aura toujours une équation homogène

La réciproque est évidente :

Toutes les courbes répondant à une même équation différentielle homogène sont semblables ; en effet soit l'équation

$$M\,dx + N\,dy = 0$$

Je pose $z = \frac{y}{x}$

faisant la substitution il vient une équation de la forme

$$\frac{dx}{x} + F(z)\, dz = 0$$

d'ou

$$x = C e^{-\int F(z)\,dz} = C\varphi(z) = C\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

Or cette équation

$$x = C\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ou C est une constante arbitraire est précisément l'équation d'une série de courbes semblables entre elles ayant l'origine pour centre de similitude.

24e Leçon.

Equation de Clairaut -- Généralisation de la méthode d'intégration par différentiation.- Solutions singulières des équations différentielles.-

---

Equation de Clairaut.- Etant donné l'équation

$$y = x\frac{dy}{dx} + F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

que nous représenterons souvent par

$$y = Px + F(P)$$

en posant $P = \frac{dy}{dx}$

pour l'intégrer, Clairaut propose de la différentier d'abord par rapport à x, il vient ainsi

$$P = P + x\frac{dP}{dx} + F'(P)\frac{dP}{dx}$$

ou en posant $\frac{dP}{dx} = q$

$$qx + F'(P)q = 0. \quad (1)$$

Cette nouvelle équation se décompose en deux autres

l'une $q = 0$
d'ou on déduit $P = C$
et en portant dans l'équation proposée

$$y = Cx + F(C)$$

telle est la solution générale qui représente un système de droites

L'autre solution de l'équation (1) est donnée par

$$x = F'(P) \quad (2)$$

on obtient la relation entre x et y en éliminant P entre cette équation et la proposée

$$y = Px + F'(P) \quad (3)$$

cette nouvelle solution qui est dite solution particulière ne contient pas de constante — Elle représente une courbe qui est l'enveloppe des droites qui répondent à la solution générale — en effet ces droites sont représentées par l'équation

$$y = cx + F(C)$$

leur enveloppe s'obtient en éliminant C entre cette équation et celle que l'on obtient en la dérivant par rapport à C

$$x + F'(C)$$

On retrouve précisément les deux équations (2) et (3) à part la signification de la quantité que l'on élimine, le résultat de l'élimination est donc le même dans les deux cas.–

D'ailleurs il est évident que si un système de droites satisfait à une certaine équation différentielle, leur enveloppe y satisfait aussi; car en un point de l'enveloppe de coordonnées x et y passe une droite du système pour laquelle la dérivée $\frac{dy}{dx}$ a la même valeur que pour la courbe; or la dérivée relative à la droite satisfait à l'équation différentielle, donc aussi celle de la courbe.

Réciproquement si l'on considère une série de lignes droites dépendant d'un paramètre elles satisfont à une équation de Clairaut; En effet si l'on prend comme paramètre le coefficient angulaire de la droite, elle aura pour équation

$$y = mx + F(m)$$

dérivant il vient

$$\frac{dy}{dx} = m$$

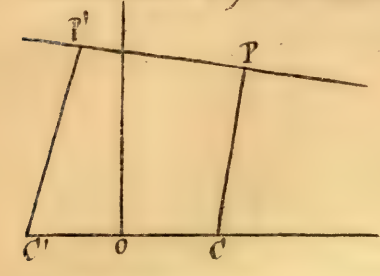
éliminant m il vient précisément une équation de Clairaut

$$y = x\frac{dy}{dx} + F\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

Exemple.– Proposons nous par exemple de chercher une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes C et C' sur les tangentes à cette courbe soit constant.–

Le problème admet évidemment comme solution toutes les droites telles que le produit des distances des deux points à cette droite soit égal à la constante donnée, puis leur enveloppe,

en mettant le problème en équation nous devons, d'après ce que nous venons de voir trouver une équation de Clairaut, dont la solution générale représentera l'ensemble des droites et dont la solution particulière représentera leur enveloppe.



Soit
$(Y-y)=P(t-x)$
l'une de ces droites rapportée à la droite CC' comme axe des x et à la perpendiculaire en son milieu comme axe des y, soit

$$\begin{cases} x = C \\ y = 0 \end{cases}$$

les coordonnées du point C, celles du point C' seront

$$\begin{cases} x = -C \\ y = 0 \end{cases}$$

la distance CP est égale à $\dfrac{y+P(C-x)}{\sqrt{1+P^2}}$

et la distance $C'P$ à $\dfrac{y-P(C+x)}{\sqrt{1+P^2}}$

exprimant que leur produit est constant il vient

$$\frac{(y-Px)^2-P^2C^2}{1+P^2}=K^2$$

ou

$$y-Px=\sqrt{P^2C^2+(1+P^2)\,K^2}$$

C'est bien une équation de Clairaut

Equation de Taylor.

Avant Clairaut, Taylor avait indiqué une équation qui pouvait être intégrée au moyen d'une différentiation; c'est l'équation

$$(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{dy}{dx}+y^2-1=0 \quad (1)$$

Dérivant il vient



$$\frac{2dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}(1+x^2)+2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2xy\frac{d^2y}{dx^2}-2y\frac{dy}{dx}-2x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\left(\frac{dy}{dx}\right)=0$$

ou $$\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2}(1+x^2)-2xy\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

cette équation se décompose en deux autres.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0$$

$$(1+x^2)\frac{dy}{dx}-xy=0.$$

La première de ces équations fournit la solution générale qui représente une série de droites, la deuxième une solution particulière qui représente leur enveloppe. L'équation proposée n'est d'ailleurs qu'une équation de Clairaut. En effet résolvant l'équation (1) par rapport a y il vient

$$y=x\frac{dy}{dx}\pm\sqrt{x^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-(1+x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1}=x\frac{dy}{dx}\pm\sqrt{1-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

elle est bien de la forme

$$y=px+F'(p)$$

Généralisation.-

Considérons l'équation

$$y=xf(p)+F(p)$$

Elle peut aussi être intégrée en la différentiant, il vient en dérivant

$$p=f(p)+xf'(p)q+F'(p)q$$

cette équation ne contient plus y, je multiplie les deux membres par $\frac{dx}{dp}$ il vient

$$(p-f(p))\frac{dx}{dp}=xf'(p)+F'(p)$$

si nous considérons x comme fonction de p c'est une

équation linéaire ; elle admet la solution générale

$$x = \varphi(P, C)$$

éliminant P entre cette équation et la proposée on obtient entre x, y et la constante arbitraire C une relation qui constitue la solution générale de l'équation proposée.

Il faut bien observer que si l'équation proposée est une généralisation de l'équation de Clairaut la méthode d'intégration n'est pas identique à celle de l'équation de Clairaut ; il n'y a de commun que la dérivation du début.

Application de la methode de dérivation.

Proposons nous de chercher les lignes de courbure d'un paraboloide

$$Z = \frac{x^2}{2a} + \frac{y^2}{2b}$$

L'équation différentielle qui définit la projection des lignes de courbure sur le plan des xy est (voir Cours de première année P 226)

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \left[pqt - s(1+q^2)\right] + \frac{dy}{dx}\left[(1+p^2)t - r(1+q^2)\right] + \left[s(1+p^2) - rpq\right] = 0$$

En posant

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2}, \quad s = \frac{d^2z}{dx\,dy} \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

c'est-à-dire ici

$$p = \frac{x}{a} \qquad q = \frac{y}{b}$$

$$r = \frac{1}{a} \quad s = 0 \quad t = \frac{1}{b}$$

Faisant les substitutions l'équation prend la forme

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 Axy + \frac{dy}{dx}\left[x^2 - Ay^2 + b\right] - xy = 0 \quad (1)$$

en posant

$$A = \frac{a}{b} \qquad b = a(a-b)$$

dérivant cette équation il vient

$$2Axy\frac{dy}{dx}\frac{d^2y}{dx^2} + Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + Ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{d^2y}{dx^2}\left(x^2 - Ay^2 + b\right) + 2x\frac{dy}{dx}$$

$$-2Ay\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - x\frac{dy}{dx} - y = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 + b\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[Ax\frac{dy}{dx} - Ay\right] + x\frac{dy}{dx} - y = 0 \quad (2)$$

Mais en raison de l'équation différentielle donnée on a

$$2Axy\frac{dy}{dx} + x^2 - Ay^2 + b = Axy\frac{dy}{dx} + \frac{xy}{\frac{dy}{dx}}$$

Portant dans (2) il vient en multipliant par $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\right] + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\left[Ax\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - Ay\frac{dy}{dx}\right] + x\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - y\frac{dy}{dx} = 0$$

ou $$\frac{d^2y}{dx^2}\left[Axy\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + xy\right] + \left(x\frac{dy}{dx} - y\right)\left[A\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + \frac{dy}{dx}\right] = 0$$

Le facteur $A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1$ est commun aux deux termes l'équation se décompose donc en deux

$$\begin{cases} A\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0 \\ xy\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx} - y\right) = 0 \end{cases}$$

De la première on déduit pour $\frac{dy}{dx}$ une valeur imaginaire, la 2ème s'écrit, en divisant par $xy\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}} + \frac{\frac{dy}{dx}}{y} - \frac{1}{x} = 0$$

c'est-à-dire en intégrant

$$L\frac{dy}{dx} + Ly - Lx = \text{constante}$$

ou $\frac{y}{x}\frac{dy}{dx} = C$

éliminant $\frac{dy}{dx}$ entre cette équation et l'équation différentielle proposée on obtient l'équation des lignes de courbures

---

Deuxième application..

Ce fait du partage de l'équation en deux autres après dérivation se présente fréquemment. Tel est le cas de l'exemple suivant.

Soit donnée l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + 4xy\left(\frac{dy}{dx}\right) - 8y^2 = 0$$

Dérivant il vient

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 4xy\frac{d^2y}{dx^2} + 4y\frac{dy}{dx} + 4x\left(\frac{dy}{dx}\right) - 16y\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left[3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy\right] + 4\frac{dy}{dx}\left[x\frac{dy}{dx} - 3y\right] = 0$$

Mais en raison de l'équation proposée elle-même on a

$$3\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 4xy = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\left[24y^2 - 8xy\frac{dy}{dx}\right]$$

Substituant dans l'équation proposée il vient

$$\frac{d^2y}{dx^2}\left(\frac{24y^2}{\frac{dy}{dx}}-8xy\right)+4\frac{dy}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}-3y\right)=0$$

ou $$\left(\frac{3y}{\frac{dy}{dx}}-x\right)\left[2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]=0$$

Cette équation se décompose en deux

$$x\frac{dy}{dx}-3y=0$$

$$2y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=0$$

De la première on déduit

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}$$

portant dans l'équation proposée il vient une solution singulière qui représente une courbe unique

$$27\frac{y^3}{x^3}+4xy\left(\frac{3y}{x}\right)-8y^2=0$$

ou $27y^3+4x^3y^2=0$

elle représente deux fois l'axe des x et la cubique

$$27y+4x^3=0$$

La deuxième équation s'écrit

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}=\frac{\frac{dy}{dx}}{y}$$

intégrant il vient

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)=C\sqrt{y}$$

Portant dans l'équation proposée on obtient une série de courbes variant avec la constante arbitraire C et qui ont pour enveloppe la courbe représentée par la solution singulière

---

Solutions singulières.-

Dans les exemples qui précèdent l'équation différentielle convenablement transformée s'est décomposée en deux autres qui ont fourni l'une une solution générale contenant une constante arbitraire, l'autre une solution particulière n'en contenant pas - Il semble que cette décomposition soit un simple hasard de calcul tout à fait rare - Cela correspond cependant à un fait géométrique; la solution particulière représente une courbe qui est l'enveloppe des courbes représentées par la solution générale; il semble même que cela doive toujours se produire la solution générale contenant une constante représente une famille de courbes, leur enveloppe ne peut manquer de satisfaire à l'équation différentielle et cependant son équation ne doit pas rentrer dans l'équation générale des enveloppées -

Pour obtenir l'équation de cette enveloppe qui constitue une solution particulière, il suffit lorsque l'on connaîtra la solution générale de chercher l'enveloppe des courbes qu'elle représente par la méthode connue. On peut les trouver directement ainsi qu'il suit: l'équation différentielle proposée $f(x, y, P)$ définit les tangentes aux courbes de la famille qui passent par un point donné; ce point appartient à l'enveloppe s'il y passe deux courbes infiniment voisines se coupant sous un angle infiniment petit; c'est-à-dire si l'équation proposée considérée comme équation en P admet une racine double, condition que l'on exprimera en éliminant P entre les deux équations

$$F'(x, y, P) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{dF}{dP} = 0 \quad (2)$$

Mais si ces équations sont satisfaites simultanément

on aura en même temps

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy+\frac{dF}{dP}dP=0 \quad (3)$$

ou comme $\frac{dF}{dP}$ est nul.

$$\frac{dF}{dx}dx+\frac{dF}{dy}dy=0 \quad (4)$$

cela entraine qu'il y ait un facteur commun aux premiers membres de (2) et (4) c'est-à dire que l'équation (3) se décompose, ce qui s'est trouvé dans les exemples précédents.

Mais cette circonstance n'est pas générale; il peut arriver qu'elle ne présente pas, par exemple lorsque l'élimination de P entre les équations (1) et (2) donne une courbe qui ne satisfait pas à l'équation differentielle proposée.

Si nous revenons à l'équation differentielle

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4xy\left(\frac{dy}{dx}\right)-8y^2=0$$

exprimant qu'elle admet une racine double en $\frac{dy}{dx}$ il vient

$$4(4xy)^3+27(8y^2)^2=0$$

ou $y=-\frac{4x^3}{27}$

c'est la solution particulière que nous avons trouvée précédemment.

Si au lieu de prendre l'équation précédente nous modifions les coefficients et que nous prenons par exemple l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4xy\frac{dy}{dx}-6y^2=0$$

le calcul direct ne donnerait pas une solution singu-
-lière comme précédemment ; si nous exprimons que l'équation admet une racine double il vient

$$4\,(4xy)^3 - 27\,(6y^2)^2 = 0.$$

ou $$y = \frac{243}{64}\,x^3$$

ce n'est pas une solution singulière comme dans le cas précédent car elle ne satisfait pas à l'équation différentielle proposée.

La méthode précédente fait connaître la solution singulière lorsqu'elle existe ; mais lorsque celle-ci n'existe pas on obtient un résultat qui ne convient pas

D'une façon générale on peut dire des solutions singulières ce qui suit.

Si une équation différentielle $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$

admet une solution générale contenant une constante arbitraire $\varphi(x, y, c) = 0$, il existe généralement en plus une solution particulière ne contenant pas de constante et ne rentrant pas dans la forme générale.

Pour la trouver supposons que l'on donne à c dans $\varphi(x\,y\,c)$ non plus une valeur constante mais une valeur fonction arbitraire de x qui pourra alors prendre une valeur absolument quelconque et permettra de représenter toute solution possible de l'équation différentielle.

Dérivant cette nouvelle équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx} + \frac{d\varphi}{dc}\,\frac{dc}{dx} = 0 \quad (1)$$

lorsque c est supposé constant la valeur de $\frac{dy}{dx}$

est définie par l'équation

$$\frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{dy}\,\frac{dy}{dx} = 0 \quad (2)$$

Pour que cette équation donne la même valeur pour $\frac{dy}{dx}$ que l'équation (1) il faut et suffit que l'on ait

$$\frac{d\varphi}{dc}\,\frac{dc}{dx}=0$$

c'est-à-dire soit $\frac{dc}{dx}=0$ ce qui correspond à la solution générale trouvée, soit $\frac{d\varphi}{dc}=0$

Si l'on a $\frac{d\varphi}{dc}=0$ avec $\varphi(x\,y,c)=0$ on obtient la nouvelle solution, solution particulière, en éliminant c entre ces deux équations. Le résultat de cette élimination est d'ailleurs indépendant de la signification attribuée à C, c'est la même solution que l'on obtient par la théorie des enveloppes.

Application.-

Si nous reprenons l'équation

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3+4\,xy\frac{dy}{dx}-8\,y^2=0$$

elle est formée à partir de l'équation

$$C^3\,y^{\frac{3}{2}}+4C\,x\,y^{\frac{1}{2}}\quad-8y^2=0$$

en la dérivant et éliminant C; si au contraire je dérive cette équation par rapport à C et que j'élimine C j'obtiendrai la solution singulière que nous avons trouvée précédemment

$$y=-\frac{4\,x^3}{27}$$

Si l'on considère l'équation analogue

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3-4\,x\,y\,\frac{dy}{dx}+8\,y^2=0$$

elle est formée à partir de l'équation

$$y = c\,(x-c)^2$$

et elle admet la solution singulière

$$y = +\frac{4x^3}{27}$$

25e Leçon.

Equations linéaires d'ordre quelconque.

Définitions. – Après avoir considéré les équations du premier ordre c'est-à-dire celles qui lient la variable, une fonction de celle-ci et sa dérivée, nous considérerons les équations d'ordre supérieur c'est-à-dire celles qui contiennent des dérivées d'ordre supérieur au premier. Nous admettrons que toute équation différentielle du $n^{ième}$ ordre admet une intégrale générale qui est une fonction bien déterminée de la variable et de n constantes arbitraires.

Nous considérerons d'abord les équations différentielles du $n^{ième}$ ordre linéaires, c'est-à-dire dans lesquelles toutes les dérivées ainsi que la fonction ne figurent qu'au premier degré. Leur forme générale est

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} - - - - - + P_{n-1}\frac{dy}{dx} + P_n\, y = Q$$

$P_1, P_2 \text{ -- } P_n$ et Q étant des fonctions de x

Q est appelé le second membre de l'équation.

Equations sans second membre. – Nous étudierons d'abord les équations linéaires sans second membre ; on ne sait pas les intégrer dans le cas général mais la connaissance de solutions particulières permet de simplifier le problème en raison des remarques suivantes.

Si $y = y_1$ est une solution de l'équation proposée

$y = C_1 y_1$ où C_1 est une constante arbitraire en est encore une car la fonction et toutes les dérivées successives se trouvent multipliées par cette constante. Si on connaît plusieurs solutions différentes

$$y = y_1$$

$$y = y_2$$

$$y = y_n$$

toute combinaison linéaire

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - - + C_n y_n$$

de ces solutions en est encore une ; cela est évident si l'on observe que toutes les dérivées successives d'une somme sont égales à la somme des dérivées des différents termes. Il en résulte que si l'on connaît n solutions distinctes d'une équation différentielle du $n^{ième}$ ordre (c'est-à-dire telles qu'aucune d'entre elles, ne puisse être déduite des autres par combinaison linéaire) la solution

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 - - + C_n y_n$ est la solution générale de l'équation proposée. En effet si elle n'était pas la solution générale il existerait une solution y_{n+1} qui ne rentrerait pas dans cette forme générale, mais alors en ajoutant $C_{n+1} y_{n+1}$ à la solution précédente on en obtiendrait une nouvelle contenant $(n+1)$ constantes arbitraires qui ne sauraient se réduire à un nombre moindre si, comme nous le supposons aucune des $(n+1)$ solutions $y_1\ y_2 - y_{n+1}$ n'est une combinaison linéaire des autres. Or la solution générale d'une équation du $n^{ième}$ ordre ne peut contenir plus de n constantes, car s'il en était ainsi on pourrait toujours déterminer les constantes de manière que y et ses n premières dérivées prennent des valeurs arbitraires et ce système absolument arbitraire devrait satisfaire à l'équation proposée ce qui est absurde.
La solution trouvée est donc bien la solution générale ; elle contient les n constantes arbitraires au premier degré

Equations à second membre.-

Etant donné une équation à second membre

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \text{-------} + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q$$

si l'on en connaît une solution quelconque $y = Z$ on peut la ramener à une équation du même ordre sans deuxième membre ; en effet posant $y = Z + u$; il vient pour déterminer u (en tenant compte de ce que Z est solution) l'équation

$$\frac{d^n u}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \text{-------} + P_{n-1} \frac{du}{dx} + P_n u = 0$$

Cette équation admet la solution générale

$$u = C_1 u_1 + C_2 u_2 \text{-------} + C_n u_n$$

et par suite la proposée admet la solution générale

$$y = Z + C_1 u_1 + C_2 u_2 \text{-------} + C_n u_n$$

cette solution contient encore les n constantes arbitraires au premier degré

Théorème.- Toutes les fois que l'on connaît une solution d'une équation linéaire du deuxième ordre sans second membre on peut abaisser son ordre d'une unité.

En effet soit

$$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \text{----------} + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0$$

l'équation proposée et soit $y = y_1$ une solution

je pose $y = u y_1$.

alors la formule d'Euler donne

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u \frac{d^n y_1}{dx_n} + n \frac{du}{dx} \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \frac{n(n-1)}{1.2} \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^{n-2} y_1}{dx^{n-2}} \text{----} + \frac{n\, d^{n-1} u}{dx^{n-1}} \frac{dy_1}{dx} + y_1 \frac{d^n u}{dx^n}$$

Portant ces valeurs dans l'équation proposée on voit que tous les termes en u disparaissent car leur coefficient est précisément le premier membre de l'équation proposée dans lequel on a remplacé y par y_1 ; il reste donc une équation de la forme.

$$Q_0 \frac{d^n u}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} - - - - + Q_{n-1} \frac{du}{dx} = 0$$

équation du $(n-1)^{ième}$ ordre par rapport à $\frac{du}{dx} = Z$

ayant trouvé Z on aura $u = \int Z\,dx$ et $y = y_1 \int Z\,dx$

Si l'on connaît deux solutions particulières

$$y = y_1$$

$$y = y_2$$

on pourra abaisser l'ordre de l'équation de deux unités en effet je fais les deux substitutions précédentes

$$y = y_1 u \quad \text{et} \quad \frac{du}{dx} = Z$$

il vient pour définir Z une équation d'ordre $(n-1)$ sans second membre dont on connaît encore une solution

$$Z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

Il faut bien observer que les 2 solutions doivent être réellement différentes ; car si l'on avait $y_2 = C y_1$; la solution de la nouvelle équation serait $Z = 0$, ce qui ne constitue pas une solution véritable permettant d'abaisser l'ordre.

De même si l'on a 3 solutions y_1 y_2 y_3 différentes (c'est-à-dire n'étant liées entre elles par aucune relation linéaire) on pourra abaisser l'ordre de 3 unités ; en effet prenant l'inconnue Z définie par les 2 substitutions

$$y = y_1 u$$

$$Z = \frac{du}{dx}$$

on abaisse l'ordre d'une unité et on obtient une équa-tion en z dont on connaît encore deux solutions

$$z = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

$$z_2 = \frac{d}{dx}\left(\frac{y_3}{y_1}\right)$$

et ces deux solutions permettront d'abaisser encore de deux unités la nouvelle équation si elles sont toutes deux différentes de 0 et si leur rapport n'est pas cons-tant ; c'est-à-dire si l'on n'a pas

$$\frac{\frac{d}{dx}\frac{y_2}{y_1}}{\frac{d}{dx}\frac{y_3}{y_1}} = C$$

ou en intégrant $\frac{y_2}{y_1} = C\frac{y_3}{y_1} + C'$

or cette dernière relation est linéaire entre y_1 y_2 y_3 elle exprime donc que les 3 solutions ne sont pas réel-lement distinctes ; nous avons supposé le contraire, l'abaissement est donc possible

---

Equation à second membre.- Méthode de la variation des Constantes.-

---

Revenons au cas d'une équation différentielle linéaire à deuxième membre et supposons que l'on connaisse la solution générale

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 --- + C_n y_n$$

de l'équation que l'on obtient en supprimant le deuxième membre - Proposons nous de chercher la solution générale de l'équation proposée

On peut d'abord employer une méthode par abaissements successifs en remarquant que étant donné

une équation avec second membre, si l'on connait une solution $y=u$ de l'équation privée de 2° membre la transformation $y=uv$ donne pour déterminer v une équation d'ordre $(n-1)$ avec 2° membre. Dans le cas présent la connaissance de chacune des n solutions particulières $y_1\, y_2 - y_n$ permettra de ramener l'équation proposée à une équation à 2° membre d'ordre moindre jusqu'à une équation du premier ordre qu'on sait intégrer

Lagrange a indiqué pour résoudre ce problème une méthode plus simple et plus élégante connue sous le nom de méthode de la variation des constantes; elle est la suivante.

Si la solution générale de l'équation sans deuxième membre est

$$y=C_1\, y_1 + C_2\, y_2 - - + C_n\, y_n$$

où $C_1\, C_2 - C_n$ sont des constantes.

je pourrai toujours représenter la solution générale de l'équation proposée par la même formule où $C_1\, C_2 - C_n$ seront des fonctions quelconques de x dont $(n-1)$ peuvent même être déterminées arbitrairement, la $n^{ième}$ étant alors déterminée par la condition même que y représente la solution considérée; ou plus généralement nous pourrons assujettir les fonctions $C_1\, C_2 - C_n$ à $(n-1)$ relations arbitraires que nous choisirons de manière que les $(n-1)$
ces $(n-1)$ relations seront prises de manière que les $(n-1)$ premières dérivées de y aient la même forme que si $C_1\, C_2 \ldots\ldots C_n$ étaient encore des constantes

On a

$$\frac{dy}{dx}=C_1\frac{dy_1}{dx}+C_2\frac{dy_2}{dx} - \text{——} C_n\frac{dy_n}{dx}+y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx} \ldots\ldots y_n\frac{dC_n}{dx}$$

pour que cette dernière ait la même forme que si les C étaient constants il faut que l'on ait

$$y_1\frac{dC_1}{dx}+y_2\frac{dC_2}{dx} - - - - - - + y_n\frac{dC_n}{dx}=0 \quad (1)$$

Si cette première condition est satisfaite on aura

$$\frac{d^2y}{dx^2}=C_1\frac{d^2y_1}{dx^2}+C_2\frac{d^2y_2}{dx^2}---+C_n\frac{d^2y_n}{dx^2}+\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}----\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}$$

cette nouvelle dérivée aura la même forme que si les C sont constants si

$$\frac{dy_1}{dx}\frac{dC_1}{dx}+\frac{dy_2}{dx}\frac{dC_2}{dx}----\frac{dy_n}{dx}\frac{dC_n}{dx}=0 \quad (2)$$

Exprimant la même condition pour les $(n-1)$ premières dérivées il vient $(n-1)$ équations de condition analogues dont la dernière est

$$\frac{d^{n-2}y_1}{dx^{n-2}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-2}y_2}{dx^{n-2}}\frac{dC_2}{dx}---+\frac{d^{n-2}y_n}{dx^{n-2}}\frac{dC_n}{dx}=0.\ (n-1)$$

Toutes ces conditions étant satisfaites on aura

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}=C_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+C_2\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}---+C_n\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}$$

et

$$\frac{d^ny}{dx^n}=C_1\frac{d^ny_1}{dx^n}+C_2\frac{d^ny_2}{dx^n}---+C_n\frac{d^ny_n}{dx^n}+\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}---+\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}$$

Nous ne pouvons plus annuler les n derniers termes de cette dernière dérivée car la $n^{ième}$ relation qui doit achever de déterminer les C est celle qui exprime que y satisfait à l'équation proposée c'est-à-dire

$$\frac{d^ny}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}--P_n\frac{d^ny}{dx^n}=Q.$$

toutes les dérivées sauf la $n^{ième}$ ayant la même forme que si les C étaient constants sauf la signification de C cette équation se réduit à

$$\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\frac{dC_1}{dx}+\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}\frac{dC_2}{dx}----\frac{d^{n-1}y_n}{dx^{n-1}}\frac{dC_n}{dx}=Q\ (n)$$

car les coefficients de $C_1\,C_2\ldots\ldots C_n$ sont nuls ils sont en effet de la forme

$$\frac{d^ny_1}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y_n}{dx^n}-----P_{n-1}\frac{dy_1}{dx}+P_ny_1$$

expression nulle puisque y_1 est une solution de l'équa-tion sans deuxième membre

Les fonctions $C_1\,C_2\ldots\ldots C_n$ sont donc déterminées

par leurs dérivées $\frac{dC_1}{dx}$ --- $\frac{dC_n}{dx}$ lesquelles sont définies par le système des n équations du 1er degré (1)(2) —(n) et chacune contiendra une constante arbitraire puisqu'elle n'est déterminée que par sa dérivée.

Les équations (1) (2) —(n) donnent d'ailleurs toujours pour $\frac{dC_1}{dx}$ $\frac{dC_2}{dx}$ ---- $\frac{dC_n}{dx}$, n valeurs bien déterminées (c'est-à-dire que le déterminant des coefficients des inconnues dans ces équations est différent de zéro) si, comme nous l'avons supposé $y = C_1 y_1 + C_2 y_2$ --- $+ C_n y_n$ est bien la solution générale de l'équation sans deuxième membre — En effet dire que y est la solution générale c'est dire que pour une valeur déterminée de x on peut fixer les valeurs de $C_1 C_2 - C_n$ de telle manière que y et ses $(n-1)$ premières dérivées prennent des valeurs arbitrairement choisies, or les coefficients des inconnues dans le système d'équations que l'on obtiendra ainsi (et dont le déterminant est nécessairement différent de 0) sont précisément les mêmes que dans les équations (1), (2), - (n)

Méthode de Cauchy.

Cauchy a proposé une autre méthode pour résoudre le même problème :

Etant donné la solution générale de l'équation sans second membre

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 \text{ --- } + C_n y_n$$

je détermine les coefficients $C_1 C_2$ — C_n de manière que pour $x = x_0$ on ait

$$y = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = 0$$

et

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = Q_0 \text{ (} Q_0 \text{ étant la valeur de } Q \text{ pour } x = x_0\text{)}$$

Dans ces conditions C_1 C_2 — C_n définis par ces n équations sont des fonctions de x_0, et y est une certaine fonction de x et de x_0 $\varphi(x, x_0)$; $y = \varphi(x, x_0)$ est évidemment une solution de l'équation sans second membre; je dis que $y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, x_0)\, dx_0$ est une solution de l'équation avec second membre et par suite que la solution générale de l'équation proposée est

$$y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, x_0)\, dx_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 - - - C_n y_n$$

En effet

si $y = \int_{x_0}^{x} \varphi(x, x_0)\, dx_0$

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, x_0)}{dx}\, dx_0 + \varphi(x, x)$$

mais $\varphi(x, x)$ est nul car par définition φ s'annule pour $x = x_0$ et par suite aussi pour $x_0 = x$

On aura alors

$$\frac{dy}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, x_0)}{dx}\, dx_0$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^2\varphi(x, x_0)}{dx^2}\, dx_0 + \Big[d\varphi(x, x_0)\Big]_{x_0 = x}$$

le deuxième terme de cette dérivée est nul pour la même raison que le deuxième terme de la dérivée première, il en sera de même de tous les seconds termes des dérivées successives jusqu'à la $n^{\text{ième}}$ et on aura successivement

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^2\varphi(x, x_0)}{dx^2}\, dx_0$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^3\varphi(x, x_0)}{dx^3}\, dx_0$$

$$\frac{d^{n-1}y}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^{n-1}\varphi(x, x_0)}{dx^{n-1}}$$

enfin

$$\frac{d^n y}{dx} = \int_{x_0}^{x} \frac{d^n \varphi(x, x_0)}{dx^n} dx_0 + \left[\frac{d^{n-1}\varphi(x, x_0)}{dx^{n-1}}\right]_{x_0 = x}.$$

Le dernier terme de cette dérivée est par définition égal à Q_0 pour $x = x_0$, inversement pour $x_0 = x$ il sera égal à Q.

Substituant dans le 1er membre de l'équation différentielle proposée il vient

$$\int_{x_0}^{x} \frac{d^n \varphi(x, x_0)}{dx^n} dx_0 + Q + P_1 \int_{x_0}^{x} \frac{d^{n-1}\varphi(x, x_0)}{dx^{n-1}} dx_0 \cdots + P_{n-1} \int_{x_0}^{x} \frac{d\varphi(x, x_0)}{dx} dx_0 + P_n \int_{x_0}^{x} \varphi(x, x_0)\, dx_0 = Q$$

ou en faisant entrer les coefficients sous le signe $\int$ ce qui est possible puisque les intégrations sont faites par rapport à x_0 et que les coefficients ne contiennent pas x_0, il vient à vérifier que l'on a

$$\int_{x_0}^{x} \left[\frac{d^n \varphi(x, x_0)}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1}\varphi(x, x_0)}{dx^{n-1}} + \cdots + P_{n-1} \frac{d\varphi(x, x_0)}{dx} + P_n \varphi(x, x_0)\right] dx_0 = 0$$

Or ceci est évident : puisque $\varphi(x, x_0)$ est une solution de l'équation privée de second membre, la quantité sous le signe $\int$ est nulle pour toute valeur de x donc aussi l'intégrale.

Telle est la méthode ; elle peut paraître plus simple que celle de Lagrange ; cependant elle conduit exactement aux mêmes calculs ; en effet pour déterminer les valeurs de $C_1 C_2 \ldots C_n$ qui figurent dans $\varphi(x, x_0)$ on a à résoudre les mêmes équations que pour déterminer $\frac{dC_1}{dx}$ $\frac{dC_2}{dx}$ $\cdots$ $\frac{dC_n}{dx}$ dans la méthode de la variation des constantes ; puis pour calculer l'intégrale $\int_{x_0}^{x} \varphi(x\, x_0)\, dx_0$ on mettra φ sous la forme d'une somme et les intégrations des différents termes de cette

-somme seront les mêmes que les intégrations qui per-
-mettront de déduire $C_1\, C_2 \text{---} C_n$ de $\frac{dC}{dx} \text{---} \frac{dC_n}{dx}$.
dans l'autre méthode.

Application.
Soit à intégrer l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \varphi(x)$$

on en déduit immédiatement y sous forme d'une intégrale multiple

$$y = \int dx \int dx \text{----} \int dx \int \varphi(x)\, dx$$

chacune des intégrations successives introduit une constante qui dans l'intégration suivante donne un terme en x, puis en x^2 etc —
donc la solution générale est représentée par l'intégrale $n^{\text{ième}}$ précédente S, plus un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré.

$$y = S + C_0 + C_1 x + C_2 x^2 \text{---} + C_{n-1} x^{n-1}$$

Pour appliquer la théorie de Cauchy je considère d'abord la solution générale de l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} = 0$$

elle est constituée par un polynôme du $(n-1)^{\text{ième}}$ degré

$$y = C_0 + C_1 x + C_2 x^2 \text{----} + C_{n-1} x^{n-1}$$

puis je détermine $C_0\, C_1\, C_2 \text{---} C_{n-1}$ de manière que y et ses $(n-2)$ premières dérivées s'annulent pour $x = x_0$ et que la $(n-1)^{\text{ième}}$ prenne la valeur $\varphi(x_0)$; on voit immédiatement que y prend alors la forme

$$y = \frac{\varphi(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{1\,2 \text{--} (n-1)}$$

Une solution particulière de l'équation proposée sera donc

$$y=\int_{x_0}^{x}\frac{(x-x_0)^{n-1}\varphi(x_0)}{1.2\ldots(n-1)}\,dx_0$$

et la solution générale s'obtiendra en ajoutant à celle-ci le polynôme $C_0+C_1x+C_2x^2 \ldots +C_{n-1}x^{n-1}$

On n'a ici qu'à faire une seule intégration au lieu des n intégrations successives qui se présentent dans l'autre solution, mais le résultat est exactement le même comme nous le verrons directement dans les exemples qui suivent.

Soit par exemple l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$$

on a immédiatement

$$\frac{dy}{dx}=\int\varphi(x)\,dx+C$$

et $$y=\int dx\int\varphi(x)\,dx+Cx+C'$$

Mais en intégrant par parties on a

$$\int dx\int\varphi(x)\,dx=x\int\varphi(x)\,dx-\int x\,\varphi(x)\,dx$$

introduisant des limites x_0 et x il vient

$$\int\varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}\varphi(x_0)\,dx_0$$

Donc

$$x\int\varphi(x)\,dx=x\int_{x_0}^{x}\varphi(x_0)\,dx_0=\int_{x_0}^{x}x\,\varphi(x_0)\,dx_0$$

et $$\int x\,\varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}x_0\,\varphi(x_0)\,dx_0.$$

D'où

$$\int dx\int\varphi(x)\,dx=\int_{x_0}^{x}x\,\varphi(x_0)\,dx_0-\int_{x_0}^{x}x_0\,\varphi(x_0)\,dx_0=\int_{x_0}^{x}(x-x_0)\,\varphi(x_0)\,dx_0$$

On retrouve ainsi la forme que fournit directement la méthode de Cauchy.

Si nous considérons de même l'équation

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \varphi(x)$$

l'intégration directe donne

$$y = \int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx + C + C'x + C''x^2.$$

intégrant par parties on a

$$\int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx = x\int dx \int \varphi(x)\,dx - \int x\,dx \int \varphi(x)\,dx$$

Calculant chacune de ces deux intégrales de la même manière il vient

$$\int dx \int dx \int \varphi(x)\,dx = x^2\int \varphi(x)\,dx - x\int x\varphi(x)\,dx - \frac{x^2}{2}\int \varphi(x)\,dx + \int \frac{x^2}{2}\varphi(x)\,dx$$
$$= \frac{x^2}{2}\int \varphi(x)\,dx - x\int x\varphi(x)\,dx + \int \frac{x^2}{2}\varphi(x)\,dx$$

introduisant des limites comme précédemment il vient

$$\frac{x^2}{2}\int_{x_0}^{x} \varphi(x_0)\,dx_0 - x\int_{x_0}^{x} x_0\varphi(x_0)\,dx_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{x_0^2}{2}\varphi(x_0)\,dx_0 = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-x_0)^2}{2}\varphi(x_0)\,dx_0$$

on retrouve encore la formule donnée par la règle de Cauchy.

26e Leçon.

Equations différentielles linéaires du n^ième^ ordre à coefficients constants. –

Equation linéaire du premier ordre. –

Si nous reprenons l'équation linéaire du premier ordre

$$\frac{dy}{dx} + Py + Q = 0$$

dont nous avons déjà indiqué deux manières de trouver l'intégrale, on peut encore l'intégrer d'après la théorie générale précédemment indiquée.

je considère d'abord l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Py = 0$$

qui admet la solution générale

$$y = Ce^{-\int P dx}$$

Je porte cette valeur dans l'équation en supposant C fonction de x, il vient alors

$$e^{-\int P dx}\frac{dC}{dx} - PCe^{-\int P dx} + PCe^{-\int P dx} + Q = 0$$

D'où

$$\frac{dC}{dx} = -Qe^{\int P dx} \quad C = -\int Qe^{\int P dx} dx$$

et par suite

$$y = -e^{-\int P dx} \times \int Qe^{\int P dx} dx$$

Ces calculs sont exactement les mêmes que ceux que nous avons faits lorsque pour intégrer cette équation nous avons posé

$$y = uv$$

et déterminé v par la condition

$$\frac{dv}{dx} + Pv = 0$$

nous avons eu alors pour déterminer u l'équation

$$v\frac{du}{dx} + Q = 0$$

c'est l'équation même par laquelle nous venons de déterminer C

Equation linéaire à coefficients constants.-

Considérons l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} \cdots\cdots + A_{n-1} \frac{dy}{dx} + A_n y = Q$$

où $A_1, A_2 \ldots\ldots A_n$ sont des constantes et Q une fonction quelconque de x.

Pour l'intégrer je considère l'équation sans second membre elle admet évidemment des solutions de la forme

$e^{\alpha x}$; en effet substituant il vient

$$e^{\alpha x}(\alpha^n + A_1 \alpha^{n-1} + A_2 \alpha^{n-2} \cdots\cdots A_{n-1}\alpha + A_n) = 0$$

si donc on prend α égal à l'une quelconque des racines du polynôme du $n^{ième}$ degré entre parenthèses on aura une solution de l'équation ; le polynôme à n racines on aura donc n solutions de l'équation ce qui permettra par suite d'en former la solution générale ; si $\alpha_1\, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ sont les n racines, cette solution sera

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} \cdots\cdots\cdots + C_n e^{\alpha_n x} \quad (1)$$

De cette solution on passera comme il a été indiqué dans la dernière leçon à la solution générale de l'équation avec deuxième membre.

Cas des racines doubles.-

La solution (1) n'est la solution générale que si les n racines $\alpha_1 \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ du polynôme sont distinctes elle ne saurait plus convenir lorsque le polynôme admet une ou plusieurs racines multiples ; on peut cependant de la formule générale déduire celle qui convient à ce cas particulier. En effet supposons que l'une des racines α_2 tende vers α_1 et supposons la égale à $\alpha_1 + h$; tant que h est différent de 0, la formule précédente est applicable et la solution générale est

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{(\alpha_1 + h)x} + C_3 e^{\alpha_3 x} \cdots\cdots + C_n e^{\alpha_n x}$$

or

$$C_2 e^{(\alpha_1+b)x} = C_2 e^{bx} e^{\alpha_1 x} = C_2 e^{\alpha_1 x}\left(1+bx+\frac{b^2x^2}{1.2}+\cdots\frac{b^nx^n}{1.2\ldots n}+\cdots\cdots\right)$$

On a donc

$$y=(C_1+C_2)e^{\alpha_1 x}+C_2 b e^{\alpha_1 x}x+C_2 e^{\alpha_1 x}\left(\frac{b^2x^2}{1.2}+\cdots\frac{b^nx^n}{1.2\cdot n}\cdots\right)+C_3 e^{\alpha_3 x}\cdots\cdots+C_n e^{\alpha_n x}$$

Je pose

$$C_1+C_2=A_1$$

$$C_2 b = B_1$$

A_1 et B_1 seront deux nouvelles arbitraires déterminées et lorsque b tendra vers 0 nous supposerons que la constante arbitraire C_2 augmente indéfiniment et par suite que C_1 augmente aussi indéfiniment par valeurs négatives; A_1 et B_1 gardant des valeurs finies et déterminées lorsque b tendra vers 0 le terme

$C_2 e^{\alpha_1 x}\left(\frac{b^2x^2}{12}+\cdots\right)$ tend évidemment vers 0 et y se réduit à

$$y=(A_1+B_1 x)e^{\alpha_1 x}+C_3 e^{\alpha_3 x}\cdots\cdots\cdots C_n e^{\alpha_n x}$$

Une racine double donne donc deux termes et deux constantes arbitraires car le coefficient de la puissance de e correspondante sera un polynôme du premier degré; on verrait de la même manière que pour une racine triple on aurait comme facteur un polynôme du 2ème degré et ainsi de suite, et que pour une racine multiple d'ordre P on aura un polynôme du $(P-1)^{\text{ième}}$ degré.

Ce résultat peut être établi directement ainsi qu'il suit; si l'on substitue à y la valeur $e^{\alpha x}$, il vient identiquement (en posant $\varphi(\alpha)=\alpha^n+A_1\alpha^{n-1}\cdots\cdots+A_n$.)

$$\frac{d^n e^{\alpha x}}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}e^{\alpha x}}{dx^{n-1}}+\cdots\cdots\cdots A_{n-1}\frac{d e^{\alpha x}}{dx}+A_n e^{\alpha x}=e^{\alpha x}\varphi(\alpha)$$

Dérivant par rapport à α et intervertissant l'ordre des dérivations successives, il vient

$$\frac{d^n}{dx^n}xe^{\alpha x}+A_1\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}xe^{\alpha x}\cdots\cdots+A_{n-1}\frac{d}{dx}xe^{\alpha x}+A_n xe^{\alpha x}=xe^{\alpha x}\varphi(\alpha)+e^{\alpha x}\varphi'(\alpha)$$

Dérivant une série de fois successivement on obtiendra une série d'équations analogues ; la première exprime que si α_1 est racine de $\varphi(\alpha)$, $e^{\alpha_1 x}$ est une solution de l'équation différentielle considérée ; la 2e exprime que si α_1 est racine double de $\varphi(\alpha)$, $xe^{\alpha_1 x}$ est aussi une solution ; la $P^{ième}$ exprimerait que si α_1 est racine multiple d'ordre P de $\varphi(\alpha)$ $x^{P-1}e^{\alpha_1 x}$ est aussi une solution ; on voit donc qu'on obtient autant de solutions que $\varphi(\alpha)$ a de racines chacune de celles-ci étant comptée avec son ordre de multiplicité, ce qui fait n solutions qui permettent par combinaison linéaire d'obtenir la solution générale de l'équation considérée.

Méthode d'Euler.-

Euler avait cherché à intégrer les équations d'ordre supérieur au premier comme celles du premier ordre en les multipliant par un facteur qui rendît le premier membre égal à une différentielle exacte. Ce facteur n'existe pas toujours ; il existe pour toutes les équations linéaires et il est fort aisé à trouver pour les équations linéaires à coefficients constants. C'est par l'emploi de ce facteur qu'Euler a proposé d'intégrer ces équations

Soit donnée l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + A_2 \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots\cdots A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = \varphi(x)$$

Cherchons un facteur de la forme $e^{\beta x}$ tel que cette expression soit la différentielle d'une autre de la forme

$$e^{\beta x}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1 e^{\beta x}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots\cdots + B_{n-2}e^{\beta x}\frac{dy}{dx} + B_{n-1}e^{\beta x} y = \int e^{\beta x}\varphi(x)dx$$

Identifiant la différentielle de cette expression avec la précédente multipliée par $e^{\beta x}$ il vient

$$\beta + B_1 = A_1$$

$$B_1\beta + B_2 = A_2$$

$$B_{n-2}\beta + B_{n-1} = A_{n-1}$$

$$B_{n-1}\beta = A_n$$

Ce sont n équations aux n inconnues $B_1 B_2 \ldots\ldots B_{n-1}$ et β pour obtenir β il suffit d'éliminer $B_1\, B_2 \ldots\ldots B_{n-1}$ en multipliant la 1ère par β^{n-1}, la 2e par β^{n-2} etc ..... la $(n-1)^{ième}$ par β puis les ajoutant et retranchant successivement il vient ainsi l'équation

$$\beta^n - A_1\,\beta^{n-1} + A_2\,\beta^{n-2} \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-1} A_{n-1}\,\beta + (-1)^n A_n = 0 \quad (1)$$

Prenant pour β l'une des racines de cette équation la multiplication par $e^{\beta x}$ permet de ramener l'équation proposée à une du $(n-1)^{ième}$ ordre puis cette nouvelle équation à une d'ordre $(n-2)$ et ainsi de suite, jusqu'à une équation du premier ordre que l'on saura intégrer. A chaque fois le facteur intégrant s'obtiendra par la résolution d'une équation telle que (1), il semble donc qu'on ait successivement à résoudre une équation du $n^{ième}$ degré puis une du $(n-1)^{ième}$, puis une du $(n-2)^{ième}$ et ainsi de suite ; mais en réalité il suffit de résoudre l'équation (1) car les équations successives qui se présentent ne sont que l'équation (1) divisée par les binômes tels que $(x-\beta)$ correspondant aux facteurs $e^{\beta x}$ employés. En effet l'équation qui se présentera après l'équation (1), sera

$$\beta^{n-1} - B_1\,\beta^{n-2} + B_2\,\beta^{n-3} \ldots\ldots\ldots + (-1)^{n-2} B_{n-2}\,\beta + (-1)^{n-1} B_{n-1} = 0$$

et les relations qui lient $A_1 A_2 \ldots A_n$ et $B_1 B_2 \ldots B_{n-1}$ expriment précisément que cette nouvelle équation résulte de la division de la précédente par $x - \beta$.

D'ailleurs l'équation (1) est identique à l'équation qui servait à définir α dans la méthode précédente sauf que les signes sont changés de deux en deux, elle admet donc des racines égales et de signes contraires à celles de l'équation en α – La méthode n'est nullement en défaut lorsque l'équation (1) présente des racines multiples, on aura simplement à employer plusieurs fois de suite le même facteur $e^{\beta x}$ – on retrouve exactement les mêmes formules que dans le cas précédent en remarquant que si $\beta_1\, \beta_2 \ldots\ldots \beta_n$ sont les racines de l'équation (1) et $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ celles de l'équation en α qui s'est présentée dans la méthode précédente.

ou $\alpha_1 = -\beta_1$

$\alpha_2 = -\beta_2$

$\alpha_n = -\beta_n$

Ceci posé multipliant l'équation proposée par $e^{\beta_1 x}$ et intégrant il vient

$$e^{\beta_1 x}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \cdots\cdots B_{n-2}\frac{dy}{dx} + B_{n-1}y\right) = \int e^{\beta_1 x} f(x)dx + C$$

ou

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + B_1\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} \cdots\cdots + B_{n-2}\frac{dy}{dx} + B_{n-1}y = \varphi_1(x) + Ce^{-\beta_1 x}$$

multipliant par le facteur $e^{\beta_2 x}$ il vient.

$$e^{\beta_2 x}\left(\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + C_1\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \cdots\cdots + C_{n-3}\frac{dy}{dx} + C_{n-2}y\right) = C' + \int \varphi_1(x)e^{\beta_2 x}dx + C\int e^{(\beta_2-\beta_1)x}dx$$

si $\beta_2 \gtrless \beta_1$

$$C\int e^{(\beta_2-\beta_1)x}dx = \frac{C}{\beta_2-\beta_1}e^{(\beta_2-\beta_1)x} = C_1 e^{-\beta_1 x}e^{\beta_2 x}$$

l'équation précédente devient alors en divisant par $e^{\beta_2 x}$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + C_1\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \cdots\cdots + C_{n-3}\frac{dy}{dx} + C_{n-2}y = \varphi_2(x) + C_1e^{-\beta_1 x} + C'e^{-\beta_2 x}$$

comme $\beta_1 = -\alpha_1$, $\beta_2 = -\alpha_2$ on retrouve là les deux premiers termes de la solution générale de l'équation sans deuxième membre, continuant de même ils s'introduiront tous successivement.

Si au contraire on suppose $\beta_1 = \beta_2$, il reste

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + C_1\frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} \cdots\cdots + C_{n-3}\frac{dy}{dx} + C_{n-2}y = \varphi_2(x) + (Cx + C')e^{-\beta_1 x}$$

c'est bien la forme des termes qui se présentent dans le cas d'une racine double dans la méthode précédente

---

Méthode de Cauchy.

La formule à laquelle on parvient dans les

méthodes précédentes doit être modifiée dans le cas des racines doubles — Cauchy s'est proposé de la transformer de manière à obtenir une formule qui conviendrait à tous les cas sans qu'il soit besoin de lui faire subir de modifications dans chaque cas particulier :

Dans le cas où toutes les racines de l'équation en α sont simples on a vu que la solution générale de l'équation sans second membre est

$$y = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} \cdots\cdots + C_n e^{\alpha_n x}.$$

Cauchy a remarqué que cette solution peut se mettre sous la forme

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{xz} f(z)\, dz}{\varphi(z)}$$

$f(z)$ étant un polynôme entier en z absolument arbitraire et $\varphi(z)$ étant le polynôme du $n^{\text{ième}}$ degré

$\varphi(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + A_2 z^{n-2} \cdots\cdots A_{n-1} z + A_n$ qui admet

donc pour racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$; l'intégrale précédente étant d'ailleurs prise le long d'un contour enfermant toutes les racines $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$

En effet cette intégrale est égale à la somme des résidus de la fonction intégrée par rapport à tous les points critiques qui sont ici les n points $\alpha_1, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$.

Or l'un de ces résidus, celui relatif à α_1 par exemple est égal (puisque la racine α_1 est supposée simple) à la limite

du produit $\dfrac{e^{xz} f(z)(z-\alpha)}{\varphi(z)}$ pour $z = \alpha_1$, cette limite est

égale à $e^{\alpha_1 x} \dfrac{f(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}$

comme f est une fonction arbitraire $\dfrac{f(\alpha_1)}{\varphi'(\alpha_1)}$ est

une constante arbitraire que je désigne par C_1 le résidu par rapport au point α_1 est donc $C_1 e^{\alpha_1 x}$; les résidus par rapport aux autres points seront de même forme et l'on aura donc

$$y = \frac{1}{2\pi i}\int \frac{e^{xz} f(z)}{\varphi(z)} dz = C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_n x} \cdots\cdots C_n e^{\alpha_2 x}$$

La formule de Cauchy convient donc bien au cas où toutes les racines de φ sont simples ; je dis qu'elle convient encore dans le cas où φ a des racines multiples ; en effet soit $z = \alpha$ une racine d'ordre P de $\varphi(z)$ calculons le résidu de la fonction intégrée par rapport à cette racine.-

Pour cela je développe $\frac{f(z)}{\varphi(z)}$ en fractions simples et je ne considère que les termes qui comprennent les puissances de $x - \alpha$ en dénominateur puisqu'ils interviennent seuls dans le résidu, soit

$$\frac{A_1}{z-\alpha} + \frac{A_2}{(z-\alpha)^2} \cdots\cdots\cdots + \frac{A_p}{(z-\alpha)^p} \quad (1)$$

chacun de ces termes tels que $\frac{A_k}{(z-\alpha)^k}$ interviendra dans l'intégrale multiplié par

$$e^{xz} = e^{\alpha x} e^{x(z-\alpha)} = e^{\alpha x}\left[1 + x(z-\alpha) + \frac{x^2(z-\alpha)^2}{1.2} \cdots \frac{x^n(z-\alpha)^n}{12\cdots n} \cdots\right]$$

multipliant cette expression par $\frac{A_k}{(z-\alpha)^k}$ on obtiendra des termes qui comme on sait donneraient tous des résidus nuls ; sauf celui qui contiendra $(z-\alpha)$ en dénominateur ; ce sera le terme

$$\frac{A_k}{(z-\alpha)^k} e^{\alpha x} \frac{x^{k-1}(z-\alpha)^{k-1}}{12\cdots(k-1)} = \frac{A_k}{12\cdots(k-1)} \frac{e^{\alpha x} x^{k-1}}{(z-\alpha)}$$

son résidu est évidemment $\frac{A_k}{12\ k-1} e^{\alpha x} x^{(k-1)}$

Chacun des k termes du développement (1) donnera un pareil terme ; donc le résidu total par rapport à la racine α sera

$$e^{\alpha x}\left(A_1 + A_2 x + \frac{A_3}{1.2} x^2 \cdots \frac{A_p}{1.2\ldots(p-1)} x^{p-1}\right)$$

ou comme $A_1 A_2 \ldots A_p$ sont arbitraires en même temps que la fonction f : ce résidu peut s'écrire

$$e^{\alpha x}\left(C + C_1 x + C_2 x^2 \ldots\ldots + C_{p-1} x^{p-1}\right)$$

Chacune des racines de φ donnera un terme analogue ayant autant de constantes arbitraires qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité — C'est bien là la solution générale dans le cas des racines multiples, la formule de Cauchy est donc bien générale

Cas des racines imaginaires.—

Dans le cas où la fonction φ admet des racines imaginaires, toutes les formules précédentes sont applicables ; mais chacune des exponentielles

$e^{\alpha x}$ est de la forme $e^{(a+bi)x} = e^{\alpha x}(\cos bx + i \sin bx)$

à chaque racine de cette forme correspond la racine conjuguée ; donc chaque groupe de 2 racines imaginaires conjuguées donne dans la solution générale un élément

$$e^{\alpha x}(A \cos bx + B \sin bx)$$

A et B étant des constantes arbitraires

Cas Particuliers.—

On a vu que étant donné une équation différentielle linéaire à deuxième membre sa résolution se ramène immédiatement à celle de la même équation sans second membre si l'on connaît une solution particulière de la proposée.

Donc dans ce cas il ne sera pas nécessaire d'appliquer la méthode de la variation des constantes. Tel est le cas où le deuxième membre

de l'équation est une exponentielle ou une puissance entière de x.

Exemple.. Soit l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots\cdots\cdots A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = e^{mx}$$

On voit immédiatement qu'elle admet une solution de la forme $y = Ge^{mx}$

En effet, exprimant qu'elle satisfait à l'équation proposée il vient pour déterminer G l'équation

$$G(m^n + A_1 m^{n-1} \cdots\cdots A_{n-1} m + A_n) = 1$$

elle donne toujours pour G une valeur et une seule sauf si le polynôme entre parenthèses est nul, soit φ ce polynôme; dans le cas où $\varphi(m)$ est différent de 0 on sait que la solution générale sera

$$y = Ge^{mx} + C_1 e^{\alpha_1 x} + C_2 e^{\alpha_2 x} \cdots\cdots + C_n e^{\alpha_n x}$$

$\alpha_1\, \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ étant les racines de l'équation $\varphi = 0$. Mais dans le cas particulier où $\varphi(m)$ est nul une des racines $\alpha_1\, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ est égale à m et, comme on l'a vu G devient indéterminé. Pour trouver la solution générale dans ce cas particulier il suffira de prendre la solution précédente et de faire tendre m vers l'une des racines de φ

Soit par exemple l'équation

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{2x}$$

elle présente le cas particulier que nous venons d'indiquer; pour en trouver la solution générale je considère l'équation auxiliaire

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = e^{mx}$$

la solution générale est

$$y = Ge^{mx} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x}$$

G étant déterminé par l'équation

$$G(m^2 - 3m + 2) = 1$$

D'où $G = \dfrac{1}{(m-1)(m-2)}$

on a donc

$$y = \frac{e^{mx}}{(m-1)(m-2)} + C_1 e^{2x} + C_2 e^{x} \quad (1)$$

faisons maintenant tendre m vers 2, la limite de cette expression sera la solution générale de l'équation proposée d'abord

C_1 étant une constante arbitraire peut encore être mise sous la forme $B - \dfrac{1}{(m-1)(m-2)}$ la solution (1) s'écrit alors

$$y = \frac{e^{mx} - e^{2x}}{(m-1)(m-2)} + Be^{2x} + Ce^{x}$$

Faisant maintenant tendre m vers 2 la limite du premier terme s'obtient par la règle de l'Hospital, il vient

$$y = \frac{xe^{2x}}{2-1} + Be^{2x} + Ce^{x} = (B + x)e^{2x} + Ce^{x}.$$

Cette même méthode de calcul s'appliquera évidemment toutes les fois que m sera une racine simple de l'équation $\varphi = 0$; si elle en est une racine multiple les calculs devront être modifiés ainsi qu'il suit.

Soit l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{x}$$

je considère l'équation auxiliaire

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{mx}$$

La solution générale est évidemment

$$y = \frac{e^{mx}}{(m-1)^2} + (Cx + C')e^{x}$$

elle s'écrit encore

$$y = \frac{e^{mx} - C_1 e^x - C_2 x e^x}{(m-1)^2} + (A+Bx)e^x$$

C_1 et C_2 étant deux fonctions de m que nous déterminerons de manière que le premier terme tende vers une limite déterminée lorsque m tend vers 1 ; ce seront par exemple ici $C_1 = 1$, $C_2 = m(m-1)$ il vient alors à la limite

$$y = \frac{x^2}{2} e^x - x e^x + (A+Bx)e^x$$

qui rentre dans la forme

$$y = \frac{x^2}{2} e^x + (A+Bx)e^x$$

Telle est la solution générale cherchée.

27e Leçon.

Equations différentielles linéaires à coefficients constants (exemples particuliers). – Equations différentielles non linéaires d'ordre supérieur au premier. – Systèmes d'équations différentielles – Réduction à des équations du premier ordre.

Equation différentielle linéaire à coefficients constants.

1° Cas où le deuxième membre est une exponentielle.

Si nous reprenons l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + A_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \text{ -------- } + A_{n-1}\frac{dy}{dx} + A_n y = e^{mx} \quad (1)$$

que nous avons intégrée dans la leçon précédente ; on peut encore l'intégrer par la méthode suivante qui ne présente pas de cas d'exception comme celle que nous avons indiquée précédemment –

Dérivant l'équation proposée il vient

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + A\frac{d^n y}{dx^n} \cdots\cdots + A_{n-1}\frac{d^2y}{dx^2} + A_n\frac{dy}{dx} = me^{mx} \quad (2)$$

J'élimine e^{mx} entre l'équation proposée et celle-ci il vient ainsi l'équation

$$\frac{d^{n+1}y}{dx^{n+1}} + (A_1 - m)\frac{d^n y}{dx^n} + (A_2 - mA_1)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \cdots\cdots (A_n - mA_{n-1})\frac{dy}{dx} - mA_n y = 0 \quad (3)$$

c'est une équation sans deuxième membre, on connaît donc son intégrale générale ; pour l'obtenir il faut résoudre l'équation

$$x^{n+1} + (A_1 - m)x^n \cdots\cdots\cdots (A_n - m)x - m = 0$$

or cette équation admet la racine $x = m$ et les n racines $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots\ldots \alpha_n$ de l'équation

$$\alpha^n + A_1\alpha^{n-1} + A_2\alpha^{n-2} \cdots\cdots\cdots A_{n-1}\alpha + A_n = 0$$

que nous avons désignée précédemment par $\varphi = 0$

La solution générale de l'équation (3) est alors

$$y = Ge^{mx} + C_1e^{\alpha_1 x} + C_2e^{\alpha_2 x} \cdots\cdots + C_ne^{\alpha_n x} \quad (4)$$

ce n'est pas la solution générale de l'équation (1), car elle satisfait à l'équation (3) qui est plus indéterminée, si nous exprimons qu'une valeur de la forme (4) satisfait à l'équation (1) il vient (en remarquant que $y = C_1e^{\alpha_1 x} \ldots + C_ne^{\alpha_n x}$ est la solution de l'équation (1) privée de 2ème membre)

$$G(m^n + A_1m^{n-1} \cdots\cdots A_{n-1}m + A_n) = 1$$

Ceci suppose que les $(n+1)$ quantités $m, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ sont toutes différentes, s'il n'en est pas ainsi la forme générale (4) est modifiée comme on l'a vu, mais elle contient encore $(n+1)$ constantes arbitraires dont l'une sera déterminée en portant cette valeur dans

l'équation (1)- Si ~~par~~ exemple m est racine simple de l'équation $\varphi=0$, la solution (4) devient

$$y=(A+Bx)e^{mx}+C_2e^{\alpha_2 x}+C_3e^{\alpha_3 x}\dots\dots+C_ne^{\alpha_n x}$$

Portant dans (1) il vient une équation qui détermine B ce qui réduit bien le nombre des constantes à n.

2°. Cas où le deuxième membre est une puissance entière de x.

Soit l'équation

$$\frac{d^ny}{dx^n}+A_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\dots\dots+A_{n-1}\frac{dy}{dx}+A_n=x^K.$$

Il est facile de voir qu'elle admet pour une de ses solutions un polynôme de degré K

En effet posant

$$y=x^K+B_1x^{K-1}+B_2x^{K-2}\dots\dots+B_{K-1}x+B_K.$$

et substituant dans le premier membre de l'équation proposée, on obtient un polynôme de degré K en x et dont le terme en x^K a pour coefficient l'unité; pour exprimer que y est solution il suffit d'annuler les K coefficients de x^{K-1}, x^{K-2} .... x et le terme indépendant; il vient ainsi K équations du 1er degré aux K inconnues $B_1, B_2 \dots B_K$ qui déterminent généralement pour elles un système de valeurs et un seul.- Connaissant cette solution particulière de l'équation proposée on obtiendra la solution générale en ajoutant une expression de la forme $C_1e^{\alpha_1 x}+C_2e^{\alpha_2 x}\dots\dots C_ne^{\alpha_n x}$.

Remarque.- Si l'on observe que, lorsque le deuxième membre de l'équation proposée est une somme de plusieurs expressions, la somme des solutions des équations que l'on obtient en prenant comme deuxième membre ces différentes expressions est une solution de l'équation proposée, on pourra intégrer de la même manière que précédemment toute équation linéaire à coefficients constants dont le deuxième sera un polynôme entier en x, ou bien une somme d'exponentielles,

ou bien encore une somme d'un polynôme entier en x et d'exponentielles.

Equation linéaire se ramenant à une équation à coefficients constants.

Soit l'équation

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + A_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \cdots\cdots A_{n-1} x \frac{dy}{dx} + A_n y = 0 \quad (1)$$

nous supposons qu'elle n'aie pas de second membre car si elle en avait un il suffirait d'appliquer ensuite la méthode de la variation des constantes.

Pour intégrer cette équation je fais le changement de variables

$$t = L.x$$

alors

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{x}\frac{dy^2}{dt^2}\frac{dt}{dx} - \frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)$$

Calculant de même toutes les dérivées successives on voit qu'à chaque nouvelle dérivation il s'introduit un nouveau facteur $\frac{1}{x}$; de telle sorte que

$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n} P_n$; P_n étant une fonction entière des n premières dérivées de y par rapport à t.

Faisant la substitution dans l'équation (1) il vient évidemment une équation linéaire à coefficients constants dont la solution générale sera de la forme

$$y = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} \cdots\cdots + C_n e^{\alpha_n t}$$

remplaçant t en fonction de x il vient la solution générale de l'équation proposée

$$y = C_1 x^{\alpha_1} + C_2 x^{\alpha_2} \cdots\cdots C_n x^{\alpha_n}.$$

Équations différentielles d'ordre supérieur non linéaires.

On connaît un grand nombre de telles équations que l'on sait intégrer, mais on ne connaît pas de méthodes générales. Dans certains cas particuliers l'ordre de l'équation peut être abaissé ce qui simplifie généralement le problème.

Cas d'abaissement.

1°. Si l'équation ne contient pas la fonction mais seulement ses dérivées successives et la variable on peut abaisser son ordre en prenant comme inconnue la dérivée première (ou même la dérivée d'ordre le plus bas qui figure dans l'équation).

Soit donnée l'équation du 3e ordre

$$F\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}\right) = 0$$

posant $\frac{dy}{dx} = P$, la nouvelle fonction de x, P sera définie par l'équation du deuxième ordre $F\left(x, P, \frac{dP}{dx}, \frac{d^2P}{dx^2}\right) = 0$; la solution générale contiendra deux constantes arbitraires et de P on passera à y par une quadrature qui introduira la troisième constante arbitraire

2°. Si l'équation proposée ne contient pas la variable on peut encore abaisser son ordre d'une unité. Cela est évident car on pourrait toujours y parvenir en échangeant l'inconnue et la variable ce qui ramènera au cas précédent.

Il est plus simple de considérer la dérivée

$$P = \frac{dy}{dx}$$

comme fonction de y; l'équation qui lie P et y est d'un ordre d'une unité inférieur à celui de la proposée; en effet on a

$$\frac{dy}{dx} = P$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dx} = P\,\frac{dP}{dy}$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = P\frac{d^2P}{dy^2}\,\frac{dy}{dx} + \frac{dP}{dy}\,\frac{dy}{dx}\,\frac{dP}{dy} = P^2\frac{d^2P}{dy^2} + P\left(\frac{dP}{dy}\right)^2.$$

Dérivant encore on aura pour expression de $\frac{d^ny}{dx^n}$ un polynôme entier contenant P et ses $(n-1)$ premières dérivées par rapport à y

---

Applications.-

Proposons nous de chercher la courbe dont le rayon de courbure est constant

On a immédiatement l'équation différentielle

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = R.$$

elle ne contient pas y, on peut donc l'abaisser en prenant comme inconnue $\frac{dy}{dx} = P$, il vient ainsi l'équation

$$\frac{(1+P^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dP}{dx}} = R$$

ou

$$\frac{dx}{R} = \frac{dP}{(1+P^2)^{\frac{3}{2}}}$$

l'intégration est immédiate puisque les variables sont séparées il vient en intégrant

$$\frac{x-\alpha}{R} = \frac{P}{\sqrt{1+P^2}}$$

d'où $P^2 = \frac{(x-\alpha)^2}{R^2-(x-\alpha)^2}$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x-\alpha)}{\sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}}$$

D'où on déduit en intégrant

$$y-\beta = \sqrt{R^2-(x-\alpha)^2}$$

C'est l'équation d'un cercle de rayon R.

Problème. – Trouver une courbe telle qu'en portant sur la normale une longueur double de celle qui est comprise entre la courbe et l'axe des x, le lieu du point ainsi obtenu soit toujours tangent à cette normale (c'est-à-dire soit l'enveloppe de cette normale ou la développée de la courbe)

Soit x, y les coordonnées d'un point M de la courbe, celles du point K dont on considère le lieu sont

$$y_1 = -y$$

et

$$x_1 = x + 2PN = x + 2y\frac{dy}{dx}$$

la direction de la tangente au lieu du point K est définie par le coefficient angulaire

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{-dy}{dx+2dy\left(\frac{dy}{dx}\right)+2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)dx} = \frac{-\frac{dy}{dx}}{1+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

égalant ce coefficient angulaire à celui de la droite MN lequel est égal à $-\frac{dx}{dy}$ il vient l'équation différentielle de la courbe

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\frac{dy}{dx}}{1+2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)}$$

ou

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2y\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)=0 \quad (1)$$

Cette équation ne contenant pas x pourra être abaissée en prenant y comme variable et $p = \frac{dy}{dx}$

comme fonction, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dP}{dx} = P\frac{dP}{dy}$$

l'équation (1) devient donc

$$1+P^2+2Py\,\frac{dP}{dy}=0$$

ou

$$\frac{dy}{y} = -\frac{2P\,dP}{1+P^2}$$

D'où en intégrant

$$L\,y = -L\,(1+P^2)+C$$

et

$$\frac{y}{\alpha} = \frac{1}{1+P^2}$$

on en déduit

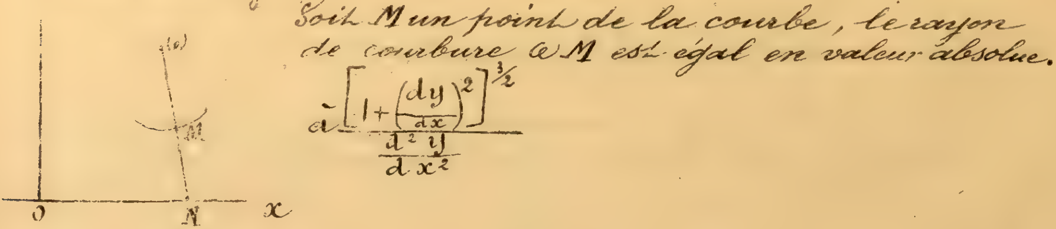
$$P^2 = \frac{\alpha-y}{y}$$

ou

$$dx = dy\sqrt{\frac{y}{\alpha-y}}$$

c'est l'équation différentielle qui définit une cycloïde engendrée par un cercle roulant sur ox.

Problème – Chercher une courbe pour laquelle la normale soit égale au rayon de courbure.
(Une telle courbe tournant autour de l'axe des x engendrera une surface de révolution dont les deux rayons de courbure principaux seront égaux) –



Soit M un point de la courbe, le rayon de courbure en M est égal en valeur absolue à

$$\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

et la normale MN à $\sqrt{y^2+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

Egalant les carrés de ces deux expressions il vient l'équation différentielle

$$y^2+y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^3}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

ou

$$y=\pm\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}$$

Le signe $\pm$ correspond au cas où la courbe est convexe ou concave vers l'axe des x ; nous prendrons le signe $+$ (le signe $-$ correspondrait comme il est facile de le vérifier à un cercle ayant son centre sur ox) — L'équation ne contenant pas x, je prenais comme précédemment P comme fonction et y comme variable, il vient

$$y=\frac{1+P^2}{P\frac{dP}{dy}}$$

ou $$\frac{dy}{y}=\frac{PdP}{1+P^2}$$

d'ou

$$Ly=\frac{1}{2}L(1+P^2)+C$$

ou

$$\frac{y}{\alpha}=\sqrt{1+P^2}$$

c'est-à-dire

$$P=\frac{\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}.$$

la constante α représente l'ordonnée du point pour lequel $P=0$ c'est-à-dire du point le plus bas.

L'équation précédente s'écrit encore

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}$$

ou

$$\frac{dy}{\sqrt{y^2-\alpha^2}} = \frac{dx}{\alpha}$$

et en intégrant

$$\frac{x-b}{\alpha} = L\,\frac{y+\sqrt{y^2-\alpha^2}}{\alpha}$$

Je puis évidemment dans cette intégration introduire le facteur α au dénominateur de la fraction soumise au logarithme ; b a alors une signification géométrique simple, c'est l'abcisse du point d'ordonnée α c'est-à-dire du point le plus bas.

De l'équation précédente on déduit

$$y+\sqrt{y^2-\alpha^2} = \alpha e^{\frac{x-k}{\alpha}}.$$

on a évidemment en même temps

$$y-\sqrt{y^2-\alpha^2} = \alpha e^{-\frac{x-k}{\alpha}}.$$

d'où en ajoutant

$$y = \frac{\alpha}{2}\left(e^{\frac{x-k}{\alpha}} + e^{-\frac{x-k}{\alpha}}\right)$$

C'est l'équation de la chaînette

Systèmes d'équations différentielles à plusieurs inconnues.

Nous n'avons jusqu'à présent considéré simultanément qu'une seule équation différentielle entre une variable, une seule fonction de cette variable (qu'on appelle souvent l'inconnue) et les dérivées successives de celle-ci ; et nous avons cherché à

déterminer cette fonction. On peut généraliser le problème en considérant un système de n équations entre une variable, n fonctions de cette variable et les dérivées de celles-ci

Réduction des équations au premier ordre.

Un tel système peut toujours, par l'introduction d'un nombre suffisant d'inconnues nouvelles être ramené à un système d'équations du premier ordre, c'est-à-dire ne contenant que la variable ; les fonctions et les dérivées premières de celles-ci. En effet il suffit pour cela de prendre comme nouvelles inconnues toutes les dérivées des fonctions qui figurent dans les équations sauf celles de l'ordre le plus élevé pour chacune des fonctions ; les équations données deviennent alors du premier ordre et celles qui lient entre elles les inconnues sont aussi du premier ordre puisqu'elles expriment que l'une est la dérivée première d'une autre d'ailleurs il reste autant d'équations que d'inconnues puisque en introduisant chaque nouvelle inconnue on ajoute une nouvelle équation.

Donc tout système d'équations différentielles peut se ramener à un système de n équations entre une variable indépendante t, n fonctions x_1 x_2 .... x_n de cette variable et leurs dérivées premières, ce système peut se mettre sous la forme suivante (en résolvant les n équations par rapport aux n dérivées.)

$$\frac{dx_1}{dt} = F_1\,(t, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$
$$\frac{dx_2}{dt} = F_2\,(t, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n)$$
$$\frac{dx_n}{dt} = F_n\,(t, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$$

Cette même réduction s'applique aux équations que nous avons considérées jusqu'ici ; une équation du 3e ordre

$F\left(x, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^3y}{dt^3}\right) = 0$ peut se ramener au système de 3 équations du 1er ordre

$$F\left(x, y, y', y'' \frac{dy''}{dx}\right) = 0$$
$$\frac{dy'}{dx} = y''$$
$$\frac{dy}{dx} = y'$$

28e Leçon.

Systèmes d'équations différentielles ordinaires dans le cas le plus général. Application à la mécanique. Lois de la gravitation universelle.

---

1. — Systèmes d'équations différentielles ordinaires. — Nous avons vu que tout système de p équations différentielles ordinaires (c'est-à-dire ne contenant que des fonctions d'une seule variable) peut être ramené à un système de n équations différentielles du premier ordre par l'introduction d'un nombre suffisant d'inconnues nouvelles ; si l'on imagine que l'on résolve les n équations par rapport aux n dérivées qui y figurent, un tel système pourra toujours être mis sous la forme

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= f_1(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \\ \frac{dx_2}{dt} &= f_2(t, x_1, x_2, \ldots\ldots x_n) \qquad\qquad (1) \\ & \\ \frac{dx_n}{dt} &= f_n(t, x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n) \end{aligned}$$

Dans le cas général on ne sait pas intégrer un tel système ; mais on sait que les expressions générales des n fonctions inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$ contiennent n constantes arbitraires. En effet nous pouvons nous donner arbitrairement, pour une valeur déterminée de t, les valeurs des n fonctions ; les équations données nous feront connaître leurs dérivées c'est-à-dire leurs accroissements infiniment petits ; on conçoit donc ainsi que de proche en proche les valeurs des n fonctions se trouvent déterminées pour toutes les valeurs de la variable lorsque nous nous donnons leurs valeurs pour une

détermination initiale de t ; les solutions générales du système proposé contiendront donc bien n constantes et n seulement et seront de la forme

$$x_1 = F_1(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n)$$

$$x_2 = F_2(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n) \qquad (2)$$

$$x_n = F_n(t, \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots \alpha_n)$$

Si l'on résout ces n équations par rapport aux n constantes, on peut encore mettre la solution générale du système proposé sous la forme

$$\alpha_1 = \varphi_1(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n)$$

$$\alpha_2 = \varphi_2(t, x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots x_n) \qquad (3)$$

$$\alpha_n = \varphi_n(t, x_1, x_2 \ldots\ldots\ldots x_n)$$

Chacune des fonctions φ est appelée une des intégrales du système proposé – Comme il y a n constantes arbitraires dans la solution générale, on voit que le système admet n intégrales distinctes c'est-à-dire qu'il y a n fonctions de la variable et des fonctions $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, qui sont constantes – Il est évident qu'en combinant ces n fonctions constantes on pourra en former une infinité d'autres qui seront constantes en même temps – Mais le caractère de la solution complète du système proposé est de comprendre n fonctions indépendantes entre elles qui soient constantes.

Etant donné une partie des solutions (2) du système proposé (1) il n'est pas possible de reconnaître si elles y satisfont bien – Au contraire on peut vérifier séparément si chacune des intégrales (3) satisfait au système (1) – En effet la condition nécessaire et suffisante pour que $\varphi_1 = \alpha_1$ soit une intégrale du système proposé est que toutes les fois que l'on donne à $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ des valeurs fonctions de t satisfaisant au système (1) l'on ait $\varphi_1 =$ Constante

ou $\dfrac{d\varphi_1}{dt} = 0$

or cette condition s'écrit

$$\frac{d\varphi_1}{dt}+\frac{dx_1}{dt}\frac{d\varphi_1}{dx_1}+\frac{dx_2}{dt}\frac{d\varphi_1}{dx_2}\cdots\cdots\cdots+\frac{dx_n}{dt}\frac{d\varphi_1}{dx_n}=0$$

Mais si $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ satisfont au système (1) cette équation se réduit à

$$\frac{d\varphi_1}{dt}+f_1\frac{d\varphi_1}{dx_1}+f_2\frac{d\varphi_1}{dx_2}\cdots\cdots\cdots+f_n\frac{d\varphi_1}{dx_n}=0 \quad (4)$$

elle doit, d'après ce que nous venons d'établir, être identiquement satisfaite lorsque l'on y remplace $x_1, x_2 \ldots x_n$ par les fonctions convenables de t ; mais on sait que ces fonctions sont telles que pour une valeur quelconque de t on peut prendre arbitrairement leurs valeurs ; l'équation (4) doit donc être identiquement satisfaite pour un système de valeurs de t et de $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n$ absolument arbitraire - Cette équation (4) qui définit φ_1 par une relation entre les $(n+1)$ variables dont elle dépend et ses dérivées partielles par rapport à celles-ci, est dite équation différentielle partielle. On voit qu'un système d'équations différentielles ordinaires se ramène immédiatement à une équation différentielle partielle

Réciproquement étant donnée l'équation différentielle partielle

$$\frac{d\varphi_1}{dt}+f_1\frac{d\varphi_1}{dt}\cdots\cdots\cdots+f_n\frac{d\varphi_1}{dx_n}=0 \qquad (5)$$

où $f_1\ f_2 \ldots\ f_n$ sont des fonctions des n variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ (et indépendantes de t) il est évident que toute intégrale $\gamma_1=\varphi_1(t, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n)$ du système d'équations différentielles ordinaires (1) est une solution de l'équation différentielle partielle proposée -

On voit donc que l'intégration de l'équation (5) et du système (1) se ramènent l'une à l'autre ; le système (1) admettant n intégrales distinctes ; il y aura n fonctions distinctes satisfaisant à l'équation (5)

Applications à la mécanique. -

Considérons un point matériel soumis à une force admettant une fonction U (c'est-à-dire à une force dont les composantes suivant les axes de coordonnées sont respectivement égales aux dérivées de U par rapport aux trois coordonnées)

Les équations différentielles de son mouvement sont

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{du}{dx}$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{du}{dy}$$

$$m\frac{d^2z}{dt^2}=\frac{du}{dz}$$

Ce système se ramène immédiatement au système des 6 équations du 1er ordre.

$$m\frac{dx'}{dt}=\frac{du}{dx}$$

$$m\frac{dy'}{dt}=\frac{du}{dy}$$

$$m\frac{dz'}{dt}=\frac{du}{dz}$$

$$x'=\frac{dx}{dt}$$

$$y'=\frac{dy}{dt}$$

$$z'=\frac{dz}{dt}$$

Les solutions générales du système comprendront 6 constantes arbitraires d'après la théorie générale ; cela est d'ailleurs bien évident ici ; car les valeurs générales des coordonnées x, y, z et des composantes de la vitesse, x', y', z' doivent contenir suffisamment de constantes arbitraires pour que l'on puisse se donner d'une manière quelconque les coordonnées initiales du mobile ainsi que les composantes de sa vitesse initiale ; elles ne sauraient d'ailleurs en contenir davantage car ces 6 éléments étant définis (ainsi que la force) le mouvement du mobile est déterminé.

Ce système admet donc 6 intégrales, c'est-à-dire

encore qu'il y a 6 fonctions distinctes de x, y, z, x', y', z' qui sont constantes - Le principe des forces vives fait connaitre immédiatement l'une de ces intégrales ; en effet la différence entre la demie force vive et le travail u à un moment quelconque est égal à cette même différence relative à la position initiale du mobile, c'est-à-dire est constante, cela nous fournit l'intégrale

$$\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) - u = h$$

D'après la théorie générale cette intégrale fait connaître une solution de l'équation différentielle partielle correspondant au système d'équations ordinaires proposé ; cette équation est

$$\frac{df}{dt} + x'\frac{df}{dx} + y'\frac{df}{dx} + z'\frac{df}{dy} + \frac{1}{m}\left(\frac{df}{dx'}\frac{du}{dx} + \frac{df}{dy'}\frac{du}{dy} + \frac{df}{dz'}\frac{du}{dz}\right) = 0$$

Si l'on pose

$$f = \frac{m}{2}(x'^2 + y'^2 + z'^2) - u$$

on a évidemment une solution de cette équation car

$$\frac{df}{dx} = -\frac{du}{dx} \quad \frac{df}{dy} = -\frac{du}{dy} \quad \frac{df}{dz} = -\frac{du}{dz}$$

et $$\frac{df}{dx'} = mx' \quad \frac{df}{dy'} = my' \quad \frac{df}{dz'} = mz'$$

Dans le cas où le principe des aires est applicable, (force rencontrant un axe fixe) cela nous fournit une deuxième intégrale du système proposé.

En effet si la force rencontre constamment l'axe des z on aura

$$xy' - yx' = C$$

On peut d'ailleurs retrouver directement dans quel cas c'est là une intégrale du système ; il faut et suffit pour cela que $f = xy' - yx'$ satisfasse à l'équation différentielle partielle ; exprimant cette condition il vient

$$x'y' - y'x' + \frac{1}{m}\left(-y\frac{du}{dx} + x\frac{du}{dy}\right) = 0$$

ou
$$\frac{\frac{du}{dx}}{\frac{du}{dy}} = \frac{x}{y}$$
ce qui exprime que la projection de la force sur le plan des xy passe par l'origine, c'est-à-dire que la force rencontre l'axe des Z.

Application au mouvement des planètes.

Proposons nous de chercher à quelles conditions doit satisfaire la force sollicitant un point matériel qui décrit une ellipse. (nous admettrons comme évident que cette force est située dans le plan de l'ellipse)

Les équations les plus générales du mouvement d'un point dans un plan (en ne supposant plus l'existence d'une fonction des forces) sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

X et Y représentant le quotient des composantes de la force par la masse du point matériel.

On a donc pour définir le mouvement le système des 4 équations du 1er ordre.

$$\frac{dx'}{dt} = X$$

$$\frac{dy'}{dt} = Y$$

$$\frac{dx}{dt} = x'$$

$$\frac{dy}{dt} = y'$$

Nous supposons que le point matériel décrit une ellipse qui aura pour équation (si l'on prend le foyer pour origine)

$$x^2+y^2=(ax+by+c)^2 \quad (1)$$

De cette équation à laquelle satisfont x et y à toute époque du mouvement et qui contient 3 constantes nous allons en déduire une autre liant les 4 inconnues x, y, x', y', les fonctions X, Y et une seule de ces constantes, cela nous fera connaître une intégrale du système proposé, exprimant qu'elle y satisfait bien nous aurons une relation nécessaire entre X, Y, x, y, x', y' et t.

Dérivant (1) il vient

$$xx'+yy'=(ax'+by')(ax+by+c) \quad (2)$$

J'élimine c entre (1) et (2), il vient (en posant $x^2+y^2=r^2$)

$$\frac{xx'}{r}+\frac{yy'}{r}=ax'+by' \quad (3)$$

Dérivant (3) il vient

$$\frac{x'^2}{r}+\frac{x}{r}\frac{dx'}{dt}-\frac{xx'}{r^2}\frac{dr}{dt}+\frac{y'^2}{r}+\frac{y}{r}\frac{dy'}{dt}-\frac{yy'}{r^2}\frac{dr}{dt}=a\frac{dx'}{dt}+\frac{b\,dy'}{dt} \quad (4)$$

Mais les équations successives (1) (2) (3) (4) sont supposées satisfaites en même temps que le système d'équations différentielles proposé on a donc $\frac{dx'}{dt}=X$ et $\frac{dy'}{dt}=Y$

remarquant de plus que puisque

$r^2=x^2+y^2$ on a $\frac{r\,dr}{dt}=xx'+yy'$, l'équation (4) s'écrit

$$\frac{x'^2+y'^2}{r}+\frac{Xx+Yy}{r}-\frac{(xx'+yy')^2}{r^3}=aX+bY$$

ou
$$\frac{(xy'-yx')^2}{r^3}+\frac{Xx+Yy}{r}=aX+bY \quad (5)$$

Éliminant b entre les équations (3) et (5) il vient

$$a(x'Y-y'X)=\frac{Y}{r}(xx'+yy')-y'\left[\frac{(xy'-yx')^2}{r^3}+\frac{Xx+Yy}{r}\right]$$

ou
$$a=\frac{\frac{x}{r}(x'Y-y'X)-\frac{y'}{r^3}(xy'-yx')^2}{x'Y-y'X} \quad (6)$$

Ceci nous fournit une intégrale du système proposé, quelles que soient les conditions initiales.

Supposons en particulier que la vitesse initiale soit dirigée

dans la direction de la force, on aura $x'_0 X_0 - y'_0 Y_0 = 0$. mais alors pour que le deuxième membre de (6) puisse avoir une valeur constante finie il faut que l'on ait en même temps

$$(x_0 y'_0 - y_0 x'_0) = 0$$

d'où il résulte qu'il faut qu'à l'origine du temps la force soit dirigée vers l'origine c'est-à-dire vers le foyer de l'ellipse - Si donc nous supposons que cette force ne dépend que de la position du point mobile dans le plan, et qu'elle est telle que tout mobile décrive une ellipse quelles que soient les conditions initiales du mouvement la force considérée est dirigée vers l'un des foyers de cette ellipse.

Cette force étant dirigée vers un point fixe on sait que le théorème des aires est applicable c'est-à-dire que la deuxième loi de Képler est une conséquence nécessaire de la première

Pour trouver l'intensité mR de la force qui sollicite le mobile, je remplace ses composantes mX et mY par

$$X = R\frac{x}{r}$$
$$Y = R\frac{y}{r}$$

Portant dans l'équation (6) il vient

$$\frac{aR}{r}(x'y - y'x) = \frac{Rx}{r^2}(x'y - y'x) - \frac{y'}{r^3}(xy' - yx')^2$$

ou

$$a = \frac{x}{r} - \frac{y'}{Rr^2}(x'y - y'x)$$

Exprimant que cette expression est bien constante quelque soit t, c'est-à-dire annulant $\frac{da}{dt}$ il vient

$$0 = \frac{x'}{r} - \frac{x}{r^2}\frac{dr}{dt} - \frac{dy'}{dt}\left(\frac{x'y - y'x}{Rr^2}\right) - y'\frac{d}{dt}\left(\frac{x'y - y'x}{Rr^2}\right)$$

Or $\quad \frac{dr}{dt} = \frac{xx' + yy'}{r}$

$$\frac{dy'}{dt} = Y = \frac{Ry}{r}$$

De plus comme nous l'avons remarqué le théorème des aires est applicable et l'on a $x'y - y'x = C$

il vient alors $\frac{d}{dt}\left(\frac{x'y - y'x}{Rr^2}\right) = C\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{Rr^2}\right)$

$$= C\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{Rr^2}\right)\frac{dr}{dt} = C\frac{d}{dr}\frac{1}{Rr^2}\frac{xx'+yy'}{r}$$

Substituant il vient

$$0 = \frac{x'}{r} - \frac{x}{r^3}(xx'+yy') - \frac{Cy}{r^3} - C'y'\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{Rr^2}\right)\frac{xx'+yy'}{r} \qquad (7)$$

C'est là une identité qui doit avoir lieu pour tout système de valeurs de x, y, x', y'

On constate que cela entraîne $\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{R\,r^2}\right) = 0 \qquad (8)$

En effet, l'équation (7) peut s'écrire

$$\frac{1}{r^3}\left[x'(x^2+y^2) - x(xx'+yy') - Cy\right] - \frac{d}{dr}\left(\frac{1}{Rr^2}\right)\times\frac{Cy'}{r}(xx'+yy') = 0$$

la première parenthèse est nulle puisque l'on a $C = x'y - y'x$; si donc nous ne supposons pas que l'on ait à toute époque du mouvement $y' = 0$ ou bien $xx'+yy' = 0$, il reste bien la condition nécessaire et suffisante (8) qui donne

$$Rr^2 = h$$

$$\text{ou } R = \frac{h}{r^2}$$

la force, qui a pour valeur mR, est donc inversement proportionnelle au carré de la distance.

Autre démonstration. —

Ce même résultat peut être établi sans calculs ainsi qu'il suit.

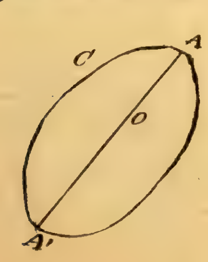
Nous supposerons que tout point matériel décrive une conique quelles que soient les conditions initiales du mouvement, et nous admettrons d'abord que la force qui agit sur le point matériel ne dépend que de sa position dans l'espace.

Si nous imaginons d'abord que la vitesse initiale imprimée au mobile soit tangente à la force, comme celle-ci a une composante normale égale à $\frac{V^2}{R}$, R est nécessairement infini et la trajectoire qui doit être une conique se réduit à une droite; en chaque point de cette droite la composante normale de la force est encore nulle, donc la force est dirigée suivant la

droite.

Par chaque point de l'espace, il passe évidemment une telle droite et une seule, toutes ces droites concourent en un même point car elles se coupent deux à deux : en effet soit 2 points M, M' et Δ Δ' les droites correspondantes ; on peut toujours à partir de M lancer le mobile avec une vitesse initiale telle qu'il passe en M'; mais alors il décrit une courbe plane sous l'influence d'une force orientée en M suivant Δ et en M' suivant Δ'; cela exige que les droites Δ et Δ' soient dans le plan de l'ellipse, c'est-à-dire qu'elles se coupent.

Ce qui précède établit que la force qui sollicite le mobile passe par un point fixe O ; nous supposerons maintenant qu'elle n'est fonction que de la distance du point considéré au point O. Je dis que le point O est situé sur l'un des axes de l'une quelconque C des coniques que peut décrire le point mobile. Pour l'établir je remarque que étant donnée la conique C on peut la faire décrire à un point mobile à partir d'un point quelconque A, en l'animant d'une vitesse tangentielle donnée par la formule $F_n = \frac{V^2}{R}$, (F_n étant la composante normale de la force). Ceci posé abaissons du point O une normale OA, il résulte de ce qui précède que l'on pourra faire parcourir la conique C au mobile dans l'un ou l'autre sens en l'animant d'une vitesse tangentielle dans un sens ou dans l'autre de grandeur $V = \sqrt{F.R}$; d'autre part les deux mouvements ainsi produits sont évidemment symétriques par rapport à OA, donc OA est un axe de la conique.



Soit OA' l'autre sommet situé sur cet axe V et V' les vitesses du mobile en ces points ; la force étant centrale, la loi des aires est vérifiée et l'on a

$$\frac{V}{V'} = \frac{OA'}{OA} \quad (1)$$

mais d'autre part si F' et F'' sont les intensités de la force aux points A et A' on a

$$F' = \frac{V^2}{R} \ (2) \quad F'' = \frac{V'^2}{R} \ (3)$$

R ayant la même valeur dans les deux formules puisqu'elles

sont relatives aux extrémités d'un même axe - Des formules (1)(2)(3) on déduit immédiatement

$$\frac{F}{OA^2} = \frac{F''}{OA'^2}$$

D'ailleurs si nous supposons (comme cela est le cas général) que étant donné le point A on peut en lançant le mobile à partir de ce point le faire parvenir en un point absolument quelconque de la droite OA, ceci montre que le long de la droite OA la force varie en raison inverse du carré de la distance, et, comme nous avons supposé que la force ne dépend que de la distance, cela fait voir que dans tout l'espace la force varie en raison inverse du carré de la distance.

Il ne peut rester qu'un cas d'exception, c'est celui où le point A étant donné, le point A' ou l'ellipse rencontre une deuxième fois la droite OA, est déterminé - Dans ce cas la position du point A' étant indépendante de la vitesse qu'on imprime en A au mobile restera encore la même si on lui imprime une vitesse égale à $\sqrt{OA \times F}$, auquel cas le point mobile prend un mouvement circulaire uniforme, mais alors on a $OA = OA'$, toutes les coniques que peut décrire le point mobile ont O pour centre; on sait que dans ce cas la force est proportionnelle à la distance. On voit donc qu'il aurait suffi de reconnaître que les trajectoires de toutes les planètes sont elliptiques, et d'ériger ce fait d'observation en loi générale pour en déduire la loi de la gravitation (car on peut admettre comme évident que l'attraction solaire est la même dans toutes les directions et de plus l'hypotèse de la force proportionnelle à la distance est inadmissible)

29e Leçon.

Equations différentielles partielles (Suite)
Intégration de l'équation $Pp + Qq = R$ - Exemples.

Equations différentielles partielles.-

Nous avons vu que, étant donné une équation différentielle

partielle.

$$\frac{dF}{dt}+\frac{dF}{dx_1}\varphi_1+\frac{dF}{dx_2}\varphi_2 \cdots\cdots+\frac{dF}{dx_n}\varphi_n=0 \quad (1)$$

dans laquelle F est une fonction inconnue des n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots\ldots x_n, t$, et $\varphi_1, \varphi_2 \ldots\ldots \varphi_n$, sont n fonctions connues de ces variables, l'intégration de cette équation se ramène immédiatement à celle du système d'équations différentielles ordinaires

$$\frac{dx_1}{dt}=\varphi_1$$
$$\frac{dx_2}{dt}=\varphi_2 \quad (2)$$
$$\frac{dx_n}{dt}=\varphi_n$$

où $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$ sont n fonctions inconnues de la variable indépendante t.

On a vu qu'à toute intégrale du système (2)
$f_1(t, x_1, x_2 \ldots\ldots x_n) =$ constante.
correspond une solution $F=f_1$ de l'équation proposée, et inversement.

On sait que le système (2) admet n intégrales distinctes et indépendantes, il en résulte que l'équation (1) est satisfaite par n fonctions distinctes $f_1, f_2, \ldots\ldots f_n$; d'ailleurs le système (2) admettant pour intégrale toute combinaison de ces n intégrales, l'équation (1) sera satisfaite par toute combinaison des n fonctions $f_1 \ldots f_2 \ldots\ldots f_n$, de la forme $F=\mathcal{F}(f_1, f_2, \ldots\ldots f_n)$. Ce résultat peut être vérifié directement ; en effet on aura immédiatement

$$\frac{dF}{dt}=\frac{d\mathcal{F}}{df_1}\frac{df_1}{dt}+\frac{d\mathcal{F}}{df_2}\frac{df_2}{dt}\cdots\cdots+\frac{d\mathcal{F}}{df_n}\frac{df_n}{dt}$$
$$\frac{dF}{dx_1}=\frac{d\mathcal{F}}{df_1}\frac{df_1}{dx_1}\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{d\mathcal{F}}{df_n}\frac{df_n}{dx_1}$$
$$\frac{dF}{dx_n}=\frac{d\mathcal{F}}{df_1}\frac{df_1}{dx_n}\cdots\cdots\cdots\cdots+\frac{d\mathcal{F}}{df_n}\frac{df_n}{dx_n}$$

Portant dans l'équation (1) il vient à vérifier

$$\frac{d\mathcal{F}}{df_1}\left(\frac{df_1}{dt}+\varphi_1\frac{df_1}{dx_1}\cdots\cdots+\varphi_n\frac{df_1}{dx_n}\right)\cdots\cdots\cdots+\frac{d\mathcal{F}}{df_n}\left(\frac{df_n}{dt}+\varphi_1\frac{df_n}{dx_1}\cdots+\varphi_n\frac{df_n}{dx_n}\right)=0$$

Or le coefficient de chacune des dérivées $\frac{dF}{df_1}, \frac{dF}{df_2}, \dots\dots \frac{dF}{df_n}$ est nul puisque chacune des fonctions $f_1, f_2 \dots, f_n$ satisfait à l'équation (1).

Je dis d'ailleurs que si les fonctions $f_1, f_2 \dots f_n$ sont indépendantes, la solution $F = \mathcal{F}(f_1, f_2, \dots f_n)$ est la solution la plus générale de l'équation proposée ; en effet les n fonctions étant indépendantes, nous pouvons les substituer comme variables indépendantes aux n variables $x_1, x_2, \dots x_n$; alors toute solution prendra la forme

$$F = \mathcal{F}(t, f_1, f_2 \dots f_n)$$

écrivant qu'elle satisfait à l'équation (1) il vient (en remarquant que comme précédemment tous les termes en $\frac{dF}{df_1}, \frac{dF}{df_2} \dots \frac{dF}{df_n}$, disparaissent)

$\frac{dF}{dt} = 0$; c'est à dire que F se réduit bien à une fonction de $f_1, f_2 \dots f_n$, seuls.

Équation $Pp + Qq = R$.

Considérons l'équation différentielle partielle

$$Pp + Qq = R$$

où P, Q, R sont des fonctions de deux variables indépendantes x et y p et q représentent les dérivées partielles d'une fonction z de ces deux variables.

Si nous cherchons une solution de la forme

$$F(x, y, z) = C$$

p et q seront définis par les deux équations

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = 0$$

$$\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = 0$$

obtenues en dérivant la précédente

Portant dans l'équation proposée il vient

$$P\frac{df}{dx}+Q\frac{dF}{dy}+R\frac{dF}{dz}=0$$

Cette équation se ramène immédiatement à la forme étudiée précédemment en divisant le 1er membre par R ; il vient ainsi

$$\frac{dF}{dz}+\frac{P}{R}\frac{dF}{dx}+\frac{Q}{R}\frac{dF}{dy}=0$$

d'après la théorie générale l'intégration de cette équation se ramène à celle du système

$$\frac{dx}{dz}=\frac{P}{R}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{Q}{R}$$

Si

$$f_1(xyz)=\alpha$$

et $$f_2(xyz)=\beta$$

sont les intégrales de ce système, on sait que l'intégrale générale de l'équation proposée est

$$\varphi(\alpha,\beta)=C$$

φ étant une fonction absolument arbitraire.

Nous avons cherché une solution de la forme $F(x,y,z)=C$ ou C est une constante arbitraire et non une solution de la forme $F(x,y,z)=0$ ce qui d'ailleurs nous aurait conduits aux mêmes calculs ; il fallait bien mettre une constante arbitraire dans le deuxième membre, car en l'annulant on supposerait une relation entre x, y, z et on ne chercherait pas une solution qui satisfît identiquement à l'équation

$$P\frac{dF}{dx}+Q\frac{dF}{dy}+R\frac{dF}{dz}=0$$

quels que soient x, y, et z.

Signification géométrique.-

Ces calculs ont une interprétation géométrique simple - L'équation proposée définit une famille de surfaces $F(xyz)=C$ telles qu'en chacun de leurs points le plan tangent passe par une droite déterminée (en effet l'équation du plan tangent en un point est $p(X-x)+q(Y-y)=Z-z$ l'équation $Pp+Qq=R$ exprime qu'il passe par la droite $\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{r}$) cette droite passant par le point considéré est alors une tangente à la surface - Pour trouver ces surfaces je considère la courbe définie à partir d'un point de l'espace par cette suite de tangentes, on sait que cette courbe est parfaitement déterminée, la position du point initial dépend de deux arbitraires, les équations de la courbe contiendront donc deux constantes arbitraires ; d'ailleurs comme elle est tangente à la droite $\frac{X-x}{P}=\frac{Y-y}{Q}=\frac{Z-z}{R}$ elle satisfait aux deux équations différentielles

$$\frac{dx}{dz}=\frac{P}{R}$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{Q}{R}$$

on en déduit les équations de la courbe (qui doivent contenir deux constantes arbitraires), soit ces équations mises sous la forme

$$\alpha=f_1(xyz)$$

$$\beta=f_2(xyz)$$

Toute surface engendrée par cette génératrice satisfera évidemment aux conditions proposées et réciproquement, or l'équation d'une telle surface est comme on sait de la forme $\varphi(\alpha,\beta)=C$,

---

Applications.- Equation des cylindres.-

Soit donnée l'équation

$$aP+bq=1$$

ou $$a\frac{dz}{dx}+b\frac{dz}{dy}=1$$

La méthode précédemment établie prescrit d'intégrer d'abord le système

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1}$$

on en déduit

$$dx = a\,dz$$
$$dy = b\,dz$$

c'est-à-dire

$$\alpha = x - az$$
$$\beta = y - bz$$

La solution générale de l'équation proposée est alors

$$F(x - az,\ y - bz) = C$$

elle représente tous les cylindres dont les génératrices sont parallèles à la direction $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{1}$

ce qui était évident puisque l'équation proposée exprime que le plan tangent aux surfaces cherchées est toujours parallèle à cette direction.

Equation des cônes.

Soit encore l'équation

$$(x-\alpha)p + (y-\beta)q + (z-\gamma) = 0$$

Pour l'intégrer je considère le système

$$\frac{dx}{(x-\alpha)} = \frac{dy}{(y-\beta)} = \frac{dz}{(z-\gamma)}$$

il admet les 2 intégrales générales

$$L(x-\alpha) - L(z-\gamma) = C^{te}$$

$$L(y-\beta) - L(z-\gamma) = \text{constante}$$

ou encore

$$\frac{x-\alpha}{z-\gamma} = C_1$$
$$\frac{y-\beta}{z-\gamma} = C_2$$

La solution de l'équation proposée est donc

$$F\left(\frac{x-\alpha}{z-\gamma}, \frac{y-\beta}{z-\gamma}\right) = C$$

elle représente un cône quelconque ayant pour sommet le point de coordonnées α, β, γ.

Equation des surfaces de révolution.

On peut prévoir immédiatement que les surfaces de révolution au tour d'un axe déterminé satisferont à une équation différentielle de la forme $Pp + Qq = R$, puisqu'en chaque point le plan tangent passe par la normale au plan du point et de l'axe.

Soit

$$\begin{aligned} t &= a v \\ u &= b v \end{aligned} \qquad (1)$$

les équations de l'axe ;
pour exprimer la propriété géométrique précédente, il suffit d'écrire que la normale à la surface rencontre l'axe ; or cette normale a pour équations

$$\begin{aligned} (t-x) + p\,(v-z) &= 0 \\ (u-y) + q\,(v-z) &= 0 \end{aligned} \qquad (2)$$

Ecrivant que les équations des systèmes (1) et (2) sont compatibles il vient

$$\frac{x+pz}{a+p} = \frac{y+qz}{b+q}$$

ou

$$p(y-bz) + q\,(az-x) = bx - ay.$$

Pour intégrer cette équation je dois considérer le système

$$\frac{dx}{y-bz} = \frac{dy}{az-x} = \frac{dz}{bx-ay}$$

Multipliant le 1er rapport par a, le deuxième par b, le troisième par l'unité et ajoutant il vient

$$a\,dx + b\,dy + dz = 0$$

d'où la première intégrale

$$ax + by + z = \alpha$$

Multipliant de même le 1er rapport par x, le 2e par y, le troisième par z et ajoutant il vient

$$x\,dx + y\,dy + z\,dz = 0$$

d'où la 2ème intégrale

$$\beta = x^2 + y^2 + z^2$$

La solution générale de l'équation proposée est alors

$$F(x^2+y^2+z^2,\ ax+by+z) = C$$

C'est là l'équation générale des surfaces de révolution autour de l'axe

$$x = az$$
$$y = bz$$

Généralisation. -

Les équations que nous venons de considérer résultent toutes de la différentiation d'une équation de la forme

$$u = F(V) \quad (1)$$

et de l'élimination de la fonction F ; nous allons considérer la forme générale de ces équations pour cela nous dérivons successivement l'équation (1) par rapport à x et à y et nous éliminons $F'(V)$ il vient ainsi

$$\frac{du}{dx} + p\frac{du}{dz} = F'(V)\left[\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz}\right]$$

et
$$\frac{du}{dy} + q\frac{du}{dz} = F'(V)\left[\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz}\right]$$

D'où en divisant membre à membre

$$\frac{\dfrac{du}{dx} + p\dfrac{du}{dz}}{\dfrac{du}{dy} + q\dfrac{du}{dz}} = \frac{\dfrac{dV}{dx} + p\dfrac{dV}{dz}}{\dfrac{dV}{dy} + q\dfrac{dV}{dz}}$$

ou en chassant les dénominateurs

$$p\left(\frac{du}{dz}\frac{dV}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dV}{dz}\right) + q\left(\frac{du}{dx}\frac{dV}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{dV}{dx}\right) = \frac{du}{dy}\frac{dV}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dV}{dy} \quad (1)$$

C'est une équation de la forme

$$Pp + Qq = R$$

Pour l'intégrer je considère suivant la méthode générale le système

$$\frac{dx}{\frac{du}{dz}\frac{dV}{dy} - \frac{du}{dy}\frac{dV}{dz}} = \frac{dy}{\frac{du}{dx}\frac{dV}{dz} - \frac{du}{dz}\frac{dV}{dy}} = \frac{dz}{\frac{du}{dy}\frac{dV}{dx} - \frac{du}{dx}\frac{dV}{dy}}$$

Pour intégrer ce système je multiplie le premier rapport par $\frac{du}{dx}$, le 2ème par $\frac{du}{dy}$ et le 3ème par $\frac{du}{dz}$ et j'ajoute il vient

$$\frac{du}{dx}dx + \frac{du}{dy}dy + \frac{du}{dz}dz = 0$$

c'est-à-dire $u = \alpha$

on obtiendra de même l'intégrale

$$V = \beta$$

ce qui donne pour la solution générale de l'équation différentielle (1)

$$\varphi(u, V) = \text{constante}$$

ou $\quad u = F(V)$

Fonctions homogènes.-

Considérons l'équation différentielle

$$x\frac{dz}{dx} + y\frac{dz}{dy} = mz$$

qui définit comme on sait une fonction homogène du degré m des deux variables x et y; pour l'intégrer je considère le système

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{mz}$$

qui admet les deux intégrales

$$\frac{y}{x} = \alpha$$
$$\frac{z}{x^m} = \beta$$

la solution générale de l'équation proposée est alors

$$F\left(\frac{y}{x}, \frac{z}{x^m}\right) = C$$

ou $$\frac{z}{x^m} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

c'est bien une fonction homogène de degré m de x et de y

Généralisation de l'équation $Pp + Qq = R$

Les équations différentielles partielles du premier ordre que nous venons de considérer ne contiennent pas la fonction inconnue et ne contiennent ses dérivées partielles que linéairement – Dans le cas plus général où l'équation différentielle proposée contient les dérivées partielles à un degré quelconque, mais ne contiennent pas la fonction inconnue, son intégration peut se ramener à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.

En effet soit

$$F(x, y, p, q) = 0 \quad (1)$$

l'équation proposée

Si les deux dérivées partielles p et q étaient connues, on pourrait immédiatement en déduire z; or p et q doivent satisfaire à la fois à l'équation (1) et à la condition nécessaire $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ (2) et réciproquement deux fonctions de x et de y satisfaisant aux équations (1) et (2) pourront être prises pour les dérivées p et q, en intégrant la différentielle $p dx + q dy$ on obtiendra une fonction z satisfaisant à l'équation proposée (1)

Si donc je me donne arbitrairement une équation de la forme

$$f(x, y, p, q) = 0 \quad (3)$$

les valeurs de p et q déduites des 2 équations (1) et (3)

prises simultanément nous donneront une valeur de z répondant au problème, si la condition (2) est satisfaite.

Mais en dérivant les équations (1) et (3) il vient

$$\frac{dF}{dx}+\frac{dF}{dp}\frac{dp}{dx}+\frac{dF}{dq}\frac{dq}{dx}=0$$

$$\frac{dF}{dy}+\frac{dF}{dp}\frac{dp}{dy}+\frac{dF}{dq}\frac{dq}{dy}=0$$

$$\frac{df}{dx}+\frac{df}{dp}\frac{df}{dx}+\frac{df}{dq}\frac{dq}{dx}=0$$

$$\frac{df}{dy}+\frac{df}{dp}\frac{dp}{dy}+\frac{df}{dq}\frac{dq}{dy}=0$$

De ces 4 équations on peut déduire en particulier les valeurs de $\frac{dp}{dy}$ et $\frac{dq}{dx}$; les égalant il vient la condition

$$\frac{dF}{dx}\frac{df}{dp}-\frac{dF}{dp}\frac{df}{dx}+\frac{dF}{dy}\frac{df}{dq}-\frac{dF}{dq}\frac{df}{dy}=0$$

Il résulte de ce qui précède que si l'on prend la fonction f des 4 variables x, y, p, q satisfaisant à cette équation différentielle partielle (dont la résolution se ramène à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires simultanées), les valeurs de p et q déduites des équations (1) et (3) sont acceptables et que la fonction $z=\int p\,dx+q\,dy$ satisfait à l'équation proposée.

30e Leçon.

Equations différentielles partielles du premier ordre.

Cas où elles sont linéaires; cas où elles ne contiennent pas z.

Applications à la mécanique. – Théorèmes de Hamilton et de Jacobi

---

Equations différentielles partielles du premier ordre linéaires.

Nous avons vu comment l'intégration d'une équation de la forme

$$\frac{dF}{dt}+\varphi_1\frac{dF}{dx_1}+\varphi_2\frac{dF}{dx_2}\cdots\cdots\cdots+\varphi_n\frac{dF}{dx_n}=0$$

peut se ramener à celle d'un système d'équations différentielles ordinaires — Cette équation est une équation différentielle partielle du premier ordre linéaire, mais elle ne présente pas la forme la plus générale d'une telle équation, parce que l'on suppose le coefficient de l'une des dérivées partielles réduit à l'unité (ce que l'on peut toujours réaliser en divisant le premier membre par un facteur convenable) et de plus parce que les coefficients des diverses dérivées ne sont fonctions que des variables indépendantes et ne contiennent pas la fonction inconnue F enfin parce qu'elle n'a pas de 2ème membre — Lorsque l'équation proposée ne présente pas ce caractère, il est facile de la ramener à la forme précédente —

En effet, soit

$$P_1 \frac{dF}{dx} + P_2 \frac{dF}{dx_2} \cdots\cdots + P_n \frac{dF}{dx_n} = Q$$

l'équation proposée où $P_1, P_2 \ldots, P_n, Q$, sont des fonctions de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$, et de F

et soit une solution définie par l'équation

$$\Psi(x_1, x_2, \ldots x_n, F) = C \quad (1)$$

prenons pour inconnue la fonction Ψ à la place de la fonction F; pour calculer les dérivées de F en fonction de celles de Ψ je dérive l'équation (1) successivement par rapport aux n variables, il vient

$$\frac{d\Psi}{dx} + \frac{d\Psi}{dF}\frac{dF}{dx_1} = 0$$

$$\frac{d\Psi}{dx_2} + \frac{d\Psi}{dF}\frac{dF}{dx_2} = 0$$

$$\frac{d\Psi}{dx_n} + \frac{d\Psi}{dF}\frac{dF}{dx_n} = 0$$

Multipliant la première équation par P_1, la deuxième par P_2 .... et la dernière par P_n, il vient en ajoutant et supposant que F est une solution de l'équation proposée

$$P_1 \frac{d\Psi}{dx_1} + P_2 \frac{d\Psi}{dx_2} \cdots\cdots + P_n \frac{d\Psi}{dx_n} + Q \frac{d\Psi}{dF} = 0$$

c'est là une équation différentielle qui définit une fonction de $(n+1)$ variables et qui rentre dans la forme précédemment

étudiée ; pour l'intégrer nous considérerons les n équations différentielles ordinaires simultanées

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} \cdots\cdots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{dF}{Q}$$

nous en déduirons des intégrales, c'est-à-dire des fonctions de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n, F$, qui seront constantes elles fourniront les diverses valeurs de ψ ; et en résolvant les diverses équations $\psi = C$ nous obtiendrons les expressions de F en fonctions de $x_1, x_2 \ldots\ldots x_n$.

Application. – Soit à intégrer l'équation

$$(y+z+t)\frac{dt}{dx} + (z+x+t)\frac{dt}{dy} + (x+y+t)\frac{dt}{dz} = x+y+z$$

elle rentre dans la forme que nous venons d'étudier pour l'intégrer je considère le système

$$\frac{dx}{y+z+t} = \frac{dy}{z+x+t} = \frac{dz}{x+y+t} = \frac{dt}{x+y+z}$$

De ces 3 équations on déduit encore par additions et soustractions

$$\frac{dt-dx}{x-t} = \frac{dt-dy}{y-t} = \frac{dt-dz}{z-t} = \frac{dx+dy+dz+dt}{3(x+y+z)}$$

ou $dL\frac{1}{x-t} = dL\frac{1}{y-t} = dL\frac{1}{z-t} = dL\sqrt[3]{x+y+z+t}$

ce qui donne les 3 intégrales

$$\frac{t-x}{t-z} = \alpha_1$$

$$\frac{t-y}{t-z} = \alpha_2$$

$$\frac{\sqrt[3]{x+y+z+t}}{t-z} = \alpha_3$$

La forme générale des intégrales du système est alors

$$F\left(\frac{t-x}{t-z}, \frac{t-y}{t-z}, \frac{\sqrt[3]{x+y+z+t}}{t-z}\right) = C$$

ou en résolvant $(x+y+z+t)^{\frac{1}{3}} = (t-z)\varphi\left(\frac{t-x}{t-z}, \frac{t-y}{t-z}\right)$

Équations différentielles partielles du premier ordre, non linéaires.

La forme générale d'une telle équation est

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

Nous considèrerons d'abord le cas particulier où z ne figure pas dans F; c'est-à-dire où l'équation est de la forme

$$F(x, y, p, q) = 0 \quad (1)$$

Nous avons vu dans la dernière leçon que si l'on pose

$$f(x, y, p, q) = 0 \quad (2)$$

avec la condition

$$\frac{dF}{dx}\frac{df}{dp} - \frac{dF}{dp}\frac{df}{dx} + \frac{dF}{dy}\frac{df}{dq} - \frac{dF}{dq}\frac{df}{dy} = 0 \quad (3)$$

en résolvant les équations (1) et (2) par rapport à p et q on obtient pour ces quantités des expressions telles, que $(p\,dx + q\,dy)$ soit intégrable; et alors la fonction $z = \int p\,dx + q\,dy$ satisfait évidemment à l'équation proposée; il est d'ailleurs évident que les calculs ne seraient en rien altérés si l'on supposait que l'équation (1) a la forme

$$F(x, y, p, q) = b$$

b étant une constante; une telle équation s'intégrera donc de la même manière

On est ramené à l'intégration de l'équation (3) qui est linéaire, pour l'intégrer nous considèrerons le système d'équations simultanées

$$\frac{dp}{-\frac{dF}{dx}} = \frac{dx}{\frac{dF}{dp}} = \frac{dq}{-\frac{dF}{dy}} = \frac{dy}{\frac{dF}{dq}} \quad (4)$$

Connaissant 3 intégrales distinctes de ce système, on obtiendra immédiatement l'intégrale générale du système (3); d'où l'on déduit p et q en résolvant les équations (1) et (2), puis z en intégrant $(p\,dx + q\,dy)$. Si l'on égale les rapports (4) à une différentielle dt; il vient pour définir x, y, p, q en fonction de la

variable auxiliaire t les 4 équations

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{dF}{dx}$$

$$\frac{dx}{dt} = +\frac{dF}{dp}$$

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dF}{dy} \qquad (5)$$

$$\frac{dy}{dt} = +\frac{dF}{dq}$$

On voit donc que l'intégration de l'équation (1) se ramène immédiatement à celle du système (5), et réciproquement ; il n'est d'ailleurs pas nécessaire de connaître la solution complète de l'un des problèmes pour pouvoir résoudre complètement l'autre.

Il résulte des calculs mêmes que nous venons de faire que si l'on connaît la solution générale du système (5) on pourra en déduire immédiatement la solution générale de l'équation proposée

$$F(x, y, p, q) = h$$

et si l'on ne connaît qu'une intégrale particulière du système (5) elle fera connaître une valeur de f et par suite une solution particulière de l'équation proposée.

Réciproquement, supposons comme la solution générale de l'équation proposée elle contient une constante arbitraire α et la constante h, elle est donc de la forme

$$Z = V(x, y, \alpha, h)^{(1)}$$

(1) La solution générale de l'équation proposée qui contient deux variables doit renfermer deux constantes arbitraires α et β, mais comme la fonction inconnue Z ne figure pas dans l'équation proposée, elle peut être augmentée ou diminuée d'une constante arbitraire, c'est donc ainsi que s'introduit la 2e constante arbitraire β, et la solution générale est donc de la forme

$$Z = V(x, y, \alpha, h) + \beta$$

nous négligeons β car il disparaît immédiatement dans les dérivations

De cette solution on peut déduire les intégrales générales du système (5) ainsi qu'il suit :

je pose

$$\frac{dV}{dx} = p \quad (a)$$

$$\frac{dV}{dy} = q \quad (b)$$

$$\frac{dV}{d\alpha} = \beta \quad (c)$$

$$\frac{dV}{dh} = t + \gamma \quad (d)$$

β et γ étant deux constantes arbitraires nouvelles je résous ces 4 équations par rapport à x, y, p, q, il vient ainsi leurs expressions en fonction de t et des 4 constantes h, α, β, γ, comme elles contiennent 4 constantes arbitraires indépendantes elles formeront les intégrales générales du système (5), si, comme je vais le montrer, elles satisfont à ces équations quels que soient h, α, β et γ.

En effet dérivant les deux membres des équations (c) et (d) par rapport à t, il vient :

$$\frac{d^2V}{d\alpha\, dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2V}{d\alpha\, dy}\frac{dy}{dt} = 0$$

et $$\frac{d^2V}{dh\, dx}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2V}{dh\, dy}\frac{dy}{dt} = 1$$

D'autre part $z = V$ est solution de l'équation proposée, donc si l'on remplace p et q par $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$, $F(x, y, p, q)$ devient identique à h.

Dérivant les deux membres de cette identité par rapport à h et par rapport à α il vient

$$\frac{dF}{dp}\frac{d^2V}{dx\, d\alpha} + \frac{dF}{dq}\frac{d^2V}{dy\, d\alpha} = 0$$

$$\frac{dF}{dp}\frac{d^2V}{dx\, dh} + \frac{dF}{dq}\frac{d^2V}{dy\, dh} = 1$$

Comparant ces deux équations aux deux précédentes il vient :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dF}{dP}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dF}{dt}$$

Ce sont deux des équations du système (5) qui se trouvent ainsi satisfaites. Pour montrer que les deux autres le sont aussi je calcule $\frac{dP}{dt}$ et $\frac{dq}{dt}$;

on a
$$P = \frac{dV}{dx}$$

d'où
$$\frac{dP}{dt} = \frac{d^2V}{dx^2}\frac{dx}{dt} + \frac{d^2V}{dx\,dy}\frac{dy}{dt}$$

ce qui équivaut (en raison des 2 équations que nous venons de démontrer être satisfaites) à

$$\frac{dP}{dt} = \frac{d^2V}{dx^2}\frac{dF}{dP} + \frac{d^2V}{dx\,dy}\frac{dF}{dq}$$

D'autre part si on dérive par rapport à x les deux membres de l'identité $(F(x, y, P, q) = h$ (en supposant P et q remplacés par $\frac{dV}{dx}$ et $\frac{dV}{dy}$) il vient

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dP}\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{dF}{dq}\frac{d^2V}{dx\,dy} = 0$$

Comparant cette équation à la précédente il vient

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{dF}{dx}$$

on montrerait de même que l'on a

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{dF}{dy}$$

Les 4 équations du système (5) sont donc bien satisfaites

Application.-

Ces résultats peuvent être immédiatement appliqués à l'étude du mouvement d'un point dans un plan, dans le cas où il existe une fonction des forces -

Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{d t^2} = \frac{d u}{d x}$$

$$\frac{d^2 y}{d t^2} = \frac{d u}{d y}$$

ou, en les ramenant à un système d'équations du premier ordre,

$$\frac{d p}{d t} = \frac{d u}{d x}$$

$$\frac{d q}{d t} = \frac{d u}{d y}$$

$$\frac{d x}{d t} = p$$

$$\frac{d y}{d t} = q$$

L'intégration de ce système se ramène immédiatement, d'après la théorie précédente à l'intégration de l'équation différentielle partielle

$$\frac{1}{2}\left(p^2 + q^2\right) - u = b$$

où p et q sont les dérivées partielles d'une fonction inconnue z

Soit $z = F(x, y, \alpha, b)$

la solution générale de cette équation, on obtiendra celle du système proposé en posant

$$\frac{d F}{d \alpha} = \beta$$

$$\frac{d F}{d b} = t + \varepsilon$$

$$\frac{d F}{d x} = p$$

$$\frac{d F}{d y} = q$$

et résolvant par rapport à x, y, p, q que l'on exprime ainsi en fonction de t et des 4 constantes arbitraires α, β, ε et b.

Cette théorie ébauchée par Hamilton a été complétée par Jacobi qui a montré que l'intégration des équations différentielles de tout problème de mécanique peut se ramener à celle d'une équation différentielle partielle dont il suffit même de trouver une solution.

Application au cas de la gravitation universelle.

Considérons un point matériel attiré vers un centre fixe par une force variant en raison inverse du carré des distances, on sait que dans ce cas il y a une fonction des forces, de la forme $\frac{\mu}{r}$; les équations du mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\frac{\mu}{r}}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\frac{\mu}{r}}{dy}$$

L'équation différentielle partielle à considérer est

$$\frac{1}{2}(p^2+q^2) - \frac{\mu}{r} = h \quad (1)$$

Pour intégrer cette équation je prends les coordonnées polaires r et θ définies par les équations

$$\begin{aligned} x &= r \cos.\theta \\ y &= r \sin.\theta \end{aligned} \qquad \text{ou} \qquad \begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} \\ \theta &= \operatorname{arctg}.\frac{y}{x} \end{aligned}$$

Or on a

$$p = \frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dx}$$

$$q = \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{dr}\frac{dr}{dy} + \frac{dz}{d\theta}\frac{d\theta}{dy}$$

D'ailleurs en différentiant les formules de transformation il vient

$$r\,dr = x\,dx + y\,dy$$

$$d\theta = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

d'où

$$\frac{dr}{dx} = \frac{x}{r} \qquad \frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{-y}{r^2} \qquad \frac{d\theta}{dy} = \frac{x}{r^2}$$

alors on aura en portant dans l'équation (1)

$$\left(\frac{dZ}{dr^2}\right)+\frac{1}{r^2}\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)^2-2\mu r=2h$$

Cette équation est évidemment satisfaite si l'on prend Z satisfaisant aux deux équations

$$\left(\frac{dZ}{dr}\right)^2=\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha}{r^2}$$

et $$\frac{1}{r^2}\left(\frac{dZ}{d\theta}\right)^2=\frac{\alpha}{r^2}$$

Or de ces deux équations on déduit en intégrant

$$Z=\int dr\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha}{r^2}}+\theta\sqrt{\alpha}$$

C'est là une solution de l'équation différentielle (1) contenant les deux constantes h et α, elle nous permet donc de trouver la solution complète du système proposé cette solution est fournie par les 4 équations

$$\frac{dZ}{d\alpha}=\beta$$

$$\frac{dZ}{dh}=t+\gamma$$

$$\frac{dZ}{dx}=p$$

$$\frac{dZ}{dy}=q$$

La première qui ne contient pas t fournit l'équation de la trajectoire, la deuxième la loi suivant laquelle elle est parcourue, et les deux dernières font connaître les composantes de la vitesse.

L'équation de la trajectoire est donc

$$\int\frac{-\frac{dr}{r^2}}{2\sqrt{\frac{2\mu}{r}+2h-\frac{\alpha}{r^2}}}+\frac{\theta}{2\sqrt{\alpha}}=\beta$$

on constate que cette équation représente une ellipse. La loi suivant laquelle la trajectoire est parcourue est définie par l'équation

$$\int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2\mu}{r} + 2b - \frac{\alpha}{r^2}}} = t + \gamma$$

De la comparaison de ces deux équations on déduit immédiatement la loi des aires

---

Cas du mouvement quelconque dans l'espace.

Si on suppose encore l'existence d'une fonction des forces on a les 3 équations différentielles du deuxième ordre

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{du}{dy}$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = \frac{du}{dz}$$

ou les 6 équations différentielles du premier ordre

$$\frac{dx}{dt} = p$$

$$\frac{dy}{dt} = q$$

$$\frac{dz}{dt} = r$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{du}{dx}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{du}{dy}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{du}{dz}$$

L'intégration de ce système se ramène comme précédemment à celle d'une équation différentielle partielle qui s'obtient de même

c'est

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] - u = b \quad (2)$$

il suffit d'en connaître une solution contenant deux constantes arbitraires pour pouvoir trouver les

intégrales générales du système proposé avec les six constantes.

En effet, soit

$V(x, y, z, \alpha, \beta, h)$ une intégrale de cette équation posant

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV}{d\alpha} &= \alpha' \\ \frac{dV}{d\beta} &= \beta' \\ \frac{dV}{dh} &= t + \gamma \\ \frac{dV}{dx} &= p \\ \frac{dV}{dy} &= q \\ \frac{dV}{dz} &= r \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

et résolvant par rapport à x, y, z, p, q, r on obtient les six inconnues cherchées. Les deux premières équations définissent la trajectoire, la 3e la position du mobile sur cette trajectoire en fonction du temps, et les 3 dernières les composantes de la vitesse.

Pour vérifier que les 6 équations précédentes font connaître les solutions générales des équations proposées, nous procéderons comme précédemment.

Par hypothèse V satisfait identiquement à l'équation (2); dérivant celle-ci par rapport à α, β et h il vient

$$\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx\,d\alpha} + \frac{dV}{dy}\frac{d^2V}{dy\,d\alpha} + \frac{dV}{dz}\frac{d^2V}{dz\,d\alpha} = 0$$

$$\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx\,d\beta} + \frac{dV}{dy}\frac{d^2V}{dy\,d\beta} + \frac{dV}{dz}\frac{d^2V}{dz\,d\beta} = 0$$

$$\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx\,dh} + \frac{dV}{dy}\frac{d^2V}{dy\,dh} + \frac{dV}{dz}\frac{d^2V}{dz\,dh} = 1$$

Dérivant de même les 3 premières équations du système (3) par rapport à t, il vient

$$\frac{d^2V}{dx\,d\alpha}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2V}{dy\,d\alpha}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2V}{dz\,d\alpha}\frac{dz}{dt}=0$$

$$\frac{d^2V}{dx\,d\beta}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2V}{dy\,d\beta}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2V}{dz\,d\beta}\frac{dz}{dt}=0$$

$$\frac{d^2V}{dx\,dh}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2V}{dy\,dh}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2V}{dz\,dh}\frac{dz}{dt}=1$$

Comparant ces équations aux précédentes il vient

$$\frac{dV}{dx}=\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dV}{dy}=\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{dV}{dz}=\frac{dz}{dt}$$

Or $\frac{dV}{dx}, \frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dz}$ sont précisément égaux à $p. q. r$ en raison des 3 dernières équations du système (3) les 3 premières équations du système proposé sont donc satisfaites; il en est de même des 3 autres; en effet

si $p=\frac{dV}{dx}$

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d^2V}{dx^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2V}{dx\,dy}\frac{dy}{dt}+\frac{d^2V}{dx\,dz}\frac{dz}{dt}$$

ou encore

$$\frac{dp}{dt}=p\frac{d^2V}{dx^2}+q\frac{d^2V}{dx\,dy}+r\frac{d^2V}{dx\,dz}$$

D'autre part dérivant les deux membres de l'identité (2) par rapport à x il vient

$$\frac{du}{dx}=\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{dV}{dy}\frac{d^2V}{dx\,dx}+\frac{dV}{dz}\frac{d^2V}{dx\,dz}=p\frac{d^2V}{dx^2}+q\frac{d^2V}{dyd}+r\frac{d^2V}{dx\,dz}$$

On a donc bien

$$\frac{du}{dx}=\frac{dp}{dt}$$

et de même on démontrera que l'on a

$$\frac{du}{dy}=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{du}{dz}=\frac{dr}{dt}$$

Le système proposé (1) est donc bien satisfait

31e Leçon.

Equations différentielles partielles du premier ordre.
Cas où elles ne contiennent pas l'inconnue -
Application à la mécanique - Cas où elles contiennent l'inconnue -
Equations du second ordre. -

Nous avons vu que étant donné l'équation différentielle partielle

$$F(x,y,p,q)=h \quad (1)$$

son intégration se ramène à celle du système

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt}&=\frac{dF}{dp}\\ \frac{dy}{dt}&=\frac{dF}{dq}\\ \frac{dp}{dt}&=-\frac{dF}{dx}\\ \frac{dq}{dt}&=-\frac{dF}{dy}\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

et réciproquement

On a montré dans la dernière leçon que toute solution de l'équation (1) contenant une arbitraire permet de trouver les solutions générales du système (2) et que de chacune des intégrales du système (2) on peut déduire une solution de l'équation (1)

Il est immédiat que quelque soit F, le système (2)

admet l'intégrale

$$F(x, y, p, q) = b$$

c'est-à-dire que $F(x, y, p, q)$ est constant quelque soit t lorsque les équations (2) sont satisfaites ; en effet

$$\frac{dF}{dt} = \frac{dF}{dx}\frac{dx}{dt} + \frac{dF}{dy}\frac{dy}{dt} + \frac{dF}{dp}\frac{dp}{dt} + \frac{dF}{dq}\frac{dq}{dt}$$

Remplaçant les dérivées par rapport à t en fonctions des dérivées par rapport à F au moyen des équations (2) il vient

$$\frac{dF}{dt} = 0$$

Théorème. - Si outre l'intégrale $F = b$ on trouve une deuxième intégrale du système (2)

$$\varphi(x, y, p, q) = \alpha$$

on peut trouver les intégrales générales du système proposé ; en effet résolvant les deux équations

$$F = b$$
$$\varphi = \alpha$$

par rapport à p et q on obtiendra des valeurs telles que $(p\,dx + q\,dy)$ soit intégrable (puisque les équations (2) sont supposées satisfaites par les intégrales F et φ)

Soit alors

$$V(x, y, \alpha, b) = \int p\,dx + q\,dy$$

$Z = V$ est alors évidemment une intégrale de l'équation (1) contenant deux constantes arbitraires, on peut comme précédemment en déduire la solution générale du système (2) celle-ci comprend quatre intégrales distinctes, nous en connaissons déjà deux, et la théorie générale nous apprend que

$$\frac{dV}{dx} = \beta$$

$$\frac{dV}{db} - t = \gamma$$

en sont deux nouvelles

Application.-

Considérons un point matériel attiré vers l'origine par une force fonction de la distance.-

Nous pourrons toujours représenter cette force par

$$m F = m \frac{d \varphi(r)}{d r}$$

ses composantes suivant les axes seront respectivement

$$m X = m \frac{x}{r} \frac{d\varphi}{dr} = m \frac{d\varphi(r)}{dx}$$

$$m Y = m \frac{d\varphi(r)}{dy}$$

Les équations différentielles du mouvement sont

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{d\varphi}{dy}$$

ou

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d\varphi}{dx}$$

$$\frac{dq}{dt} = \frac{d\varphi}{dy}$$

$$\frac{dx}{dt} = p$$

$$\frac{dy}{dt} = q$$

Ces équations sont évidemment de la forme de celles du système (2) si l'on pose

$$F = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) - \varphi(r)$$

Egalant cette fonction à une constante on a une première intégrale du système, elle n'est autre que l'intégrale des forces vives

Le théorème des aires en fournit une deuxième

$$py - qx = \alpha$$

Nous pouvons en obtenir deux autres qui achèveront de déterminer le mouvement, au moyen de la

théorie précédente

Des deux équations

$$p^2+q^2=2\varphi+b \quad (1)$$
$$py-qx=\alpha \quad (2)$$

je déduis

$$(p^2+q^2)(x^2+y^2)-(py-qx)^2=(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2$$

ou $$(px+qy)^2=(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2$$

et $$px+qy=\sqrt{(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2} \quad (3)$$

Des équations (2) et (3) on tire

$$p=\frac{y\sqrt{(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2}+\alpha y}{x^2+y^2}$$
$$q=\frac{y\sqrt{(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2}-\alpha x}{x^2+y^2}$$

On a donc pour la fonction V

$$V=\int\frac{x\,dx+y\,dy}{x^2+y^2}\sqrt{(2\varphi+b)(x^2+y^2)-\alpha^2}+\alpha\frac{y\,dx-x\,dy}{x^2+y^2}$$

ou en repassant aux coordonnées polaires

$$V=\alpha\theta+\int\frac{dr}{r}\sqrt{[2\varphi(r)+b]r^2-\alpha^2}$$

Les deux dernières intégrales du système proposé sont alors

$$\frac{dV}{d\alpha}=\beta$$
$$\frac{dV}{db}-t=\gamma$$

La première s'écrit

$$\theta+\int\frac{-\alpha\,dr}{r\sqrt{(2\varphi+b)r^2-\alpha^2}}=\beta$$

elle définit la trajectoire du mobile

La deuxième s'écrit

$$\int\frac{r\,dr}{\sqrt{(2\varphi+b)r^2-\alpha^2}}-t=\gamma$$

elle indique la loi suivant laquelle le mobile parcourt la trajectoire

Équation différentielle partielle du premier ordre.

Cas général.

Considérons cette équation sous la forme la plus générale

$$F\left(x, y, z, \frac{dz}{dx}, \frac{dz}{dy}\right) = 0$$

Toutes les fois que l'on connaît une solution contenant deux constantes arbitraires (dite solution complète) on peut en déduire la solution générale ; nous ne démontrerons pas cette propriété sous cette forme, nous établirons seulement que lorsque l'on connaît une solution complète de l'équation proposée on peut en déduire une infinité d'autres dans lesquelles s'introduit une fonction arbitraire (une telle solution est d'ailleurs la solution générale)

Remarquons d'abord que dans ce qui précède nous avons considéré une telle équation mais où z ne figure pas et nous en avons pris une solution $Z = V(x, y, \alpha, b)$ ne contenant qu'une constante arbitraire (b étant supposé une constante donnée) ; la deuxième constante arbitraire s'introduit immédiatement par addition car il est évident que si $Z = V$ est une solution $Z = V + \beta$ en est encore une.

Si nous revenons à l'équation générale, soit

$$Z = f(x, y, \alpha, \beta)$$

la solution complète supposée connue qui représente une famille de surfaces dépendant de deux paramètres.

Entre α et β j'établis une relation arbitraire z prend alors la forme

$$Z = f\left[x, y, \alpha, \varphi(\alpha)\right] \quad (1)$$

cette équation représente alors une famille de surfaces

a un seul paramètre dont l'enveloppe (qui doit évidemment satisfaire aussi à l'équation différentielle proposée) est définie par l'élimination de α entre l'équation (1) et l'équation dérivée par rapport à α

$$\frac{df}{d\alpha}+\frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}=0 \quad (2)$$

Si par exemple de cette dernière équation je tire α en fonction de x et de y et que je porte dans l'équation (1) j'obtiens l'équation de l'enveloppe, variable avec la fonction φ.

Il est aisé de vérifier directement que l'équation obtenue en éliminant α entre les équations (1) et (2) fournit une solution de l'équation différentielle proposée en effet; dérivant l'équation (1) par rapport à x, il vient

$$\frac{dz}{dx}=\frac{df}{dx}+\frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}$$

mais en vertu de l'équation (2) qui est satisfaite simultanément cette expression se réduit à

$$\frac{dz}{dx}=\frac{df}{dx}$$

on aura de même

$$\frac{dz}{dy}=\frac{df}{dy}$$

ces dérivées partielles ont donc la même expression que lorsque l'on prend

$$z=f(x,y,\alpha,\beta)$$

sauf le sens à donner aux lettres α et β (qui représentent maintenant certaines fonctions de x et y) il en est de même de l'expression de z; or comme ces trois fonctions satisfont identiquement à l'équation proposée quand α et β sont des constantes arbitraires, elles y satisfont évidemment aussi dans ce cas.

De la solution donnée nous en déduisons une beaucoup plus générale puisqu'elle contient une fonction arbitraire; c'est ce que l'on appelle la solution

générale, elle ne peut cependant pas toujours représenter toute solution ; c'est ainsi par exemple que l'équation qui représente l'enveloppe de la famille de surfaces à deux paramètres $z = f(x, y, \alpha, \beta)$ satisfait évidemment à l'équation différentielle proposée et ne rentre pas dans la forme générale que nous venons de trouver.

Exemple

Soit l'équation

$$z = \left(\frac{dz}{dx}\right)\left(\frac{dz}{dy}\right) = pq$$

On peut l'intégrer par changement de variables, si l'on prend y comme fonction et x et z comme variables indépendantes, on obtient une équation ne contenant pas y, on rentre donc dans un cas connu.

Il est plus simple de remarquer que l'on aperçoit immédiatement une solution complète

$$z = (x+a)(y+b)$$

Pour en déduire la solution générale je pose

$$b = \varphi(a)$$

il vient

$$z = (x+a)\left[y + \varphi(a)\right] \quad (1)$$

Dérivant par rapport à a il vient

$$y + \varphi(a) + (x+a)\varphi'(a) = 0 \quad (2)$$

et je dois éliminer a entre les équations (1) et (2) à chaque fonction φ correspond une solution particulière, soit par exemple $\varphi(a) = -a$ l'équation (1) devient

$$z = (x+a)(y-a)$$

l'équation (2) devient

$$(y-a) - (x+a) = 0$$

ou $a = \dfrac{y-x}{2}$

portant dans la valeur de z, il vient la solution particulière

cherchée.

$$z=\left(\frac{x+y}{2}\right)\left(-\frac{y+x}{2}\right)=-\frac{(x+y)^2}{4}$$

Autre exemple.

Soit donnée l'équation

$$(z-px-qy)=\varphi(p,q)$$

On aperçoit immédiatement une solution complète

$$z=ax+by+\varphi(a,b) \quad (1)$$

Pour obtenir la solution générale je pose

$$b=\psi(a)$$

je prends la dérivée de (1) par rapport à a et j'élimine a entre l'équation précédente et celle que l'on obtient ainsi.

La solution complète (1) représente une infinité de plans ; la solution générale obtenue comme nous venons de l'indiquer représente une série de surfaces développables enveloppes des systèmes de plans que l'on obtient en associant les précédents suivant une loi définie par la relation $b=\psi(a)$

Enfin en dehors de ces surfaces il en existe encore une qui satisfait à l'équation proposée, c'est l'enveloppe de tous les plans (1) obtenue en éliminant a et b entre l'équation (1) et les deux équations

$$x+\frac{d\varphi}{da}=0$$

$$y+\frac{d\varphi}{db}=0$$

L'ensemble des solutions de l'équation proposée est donc constitué 1° par cette surface (solution particulière) 2° par les surfaces développables circonscrites (solution générale) 3° par les plans tangents à la surface (solution complète)

Équations différentielles partielles du deuxième ordre.

Il n'existe pas de méthodes générales simples pour intégrer les équations différentielles [1] du deuxième ordre; nous allons indiquer quelques équations remarquables.

[1] partielles

Équation des cordes vibrantes.

Soit l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a^2 \frac{d^2 z}{dy^2}$$

que l'on rencontre dans un grand nombre de problèmes de physique, notamment celui des cordes vibrantes

Pour l'intégrer on peut faire le changement de variables

$$\alpha = y - a x$$
$$\beta = y + a x$$

On aura

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} + \frac{dz}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} = a\left(\frac{dz}{d\beta} - \frac{dz}{d\alpha}\right)$$

Cette équation qui lie la dérivée d'une fonction par rapport à x, aux dérivées de la même fonction par rapport à α et β nous fait immédiatement connaître la dérivée seconde

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a\left(\frac{dz^2}{d\beta dx} - \frac{d^2 z}{d\alpha dx}\right) = a^2\left[\frac{d^2 z}{d\beta^2} - 2\frac{d^2 z}{d\alpha d\beta} + \frac{d^2 z}{d\alpha^2}\right]$$

On aura de la même manière

$$\frac{d^2 z}{dy^2} = \frac{d^2 z}{d\beta^2} + \frac{2 d^2 z}{d\alpha d\beta} + \frac{d^2 z}{d\alpha^2}$$

Portant dans l'équation proposée il vient

$$\frac{d^2 z}{d\alpha d\beta} = 0$$

Intégrant par rapport à β il vient

$$\frac{dz}{d\alpha} = f(\alpha)$$

puis $z = \alpha f(\alpha) + f_1(\beta)$

mais f étant une fonction absolument quelconque on peut y faire rentrer le facteur α et écrire

$$z = f(\alpha) + f_1(\beta) = f(y - ax) + f_1(y + ax)$$

Autre méthode.

On peut encore intégrer l'équation proposée par la méthode suivante qui peut être employée dans un certain nombre d'autres cas.

Posons

$$p = \frac{dz}{dx} \qquad q = \frac{dz}{dy}$$

$$r = \frac{d^2z}{dx^2} \quad s = \frac{d^2z}{dxdy} \quad t = \frac{d^2z}{dy^2}$$

Soit $r = a^2 t$

l'équation proposée nous allons chercher une intégrale du premier ordre, c'est-à-dire une relation entre la fonction, les variables et les dérivées du premier ordre telle qu'elle entraîne nécessairement l'équation proposée.

Soit $F(x, y, z, p, q) = 0$ cette relation

On en déduit en dérivant

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} + r\frac{dF}{dp} + s\frac{dF}{dq} = 0$$

$$\frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} + s\frac{dF}{dp} + t\frac{dF}{dq} = 0$$

De ces relations je déduis r et t et je porte dans la relation $r = a^2 t$, je pose d'ailleurs

$$\frac{dF}{dx} = X \quad \frac{dF}{dp} = P$$

$$\frac{dF}{dy} = Y \quad \frac{dF}{dq} = Q$$

$$\frac{dF}{dz} = Z$$

il vient ainsi

$$\frac{X + pZ + sQ}{P} = a^2 \frac{Y + qZ + sP}{Q} \qquad (1)$$

Dans cette équation je fais disparaître le terme en s ce qui donne la condition

$$Q^2 - a^2 P^2$$

qui se décompose en deux autres.

$$Q - aP = 0$$

$$Q + aP = 0$$

Prenant la première elle s'écrit

$$\frac{dF}{dq} - a\frac{dF}{dP} = 0 \quad (2)$$

pour l'intégrer je considère le système

$$\frac{dq}{1} = -\frac{dP}{a}$$

d'où $a\,dq + dP = 0$ et $P + aq =$ constante

On a donc pour intégrale générale du système (2) $\Psi(P+aq) = C$; C étant indépendant de P et de q mais variable avec x, y, et z : ce qui donne comme solution générale de l'équation (2)

$$P + aq = \varphi(x, y, z)$$

si on était parti de l'équation $Q + aP = 0$, on aurait trouvé

$$P - aq = \varphi(x, y, z)$$

l'une ou l'autre de ces équations étant satisfaites l'équation (1) se réduit à

$$X + pZ = \pm a(Y + qZ) \quad (3)$$

car $P = 1$ et $Q = \pm a$

L'équation (3) sera satisfaite quels que soient p et q si l'on a

$$Z = 0$$

$$X = \pm aY$$

La première équation entraîne que φ soit indépendant de z quant à la 2e équation elle est identique à l'équation (2) elle admet la solution

$\varphi = f(y + ax)$ en prenant le signe +

et $\varphi = f(y - ax)$ en prenant le signe −

Donc si l'on pose

$$p + a q = f(y + a x) \quad (4)$$

ou bien $p - a q = f_1(y - a x) \quad (5)$

l'équation différentielle proposée est satisfaite ; d'ailleurs inversement l'équation proposée entraîne ces deux-ci simultanément ; en effet.

posons $p + a q = u$

je dis que l'on a nécessairement

$a = f(y + a x)$

en effet

$$\frac{du}{dx} = \frac{dp}{dx} + a\frac{dq}{dx} = r + a s$$

$$\frac{du}{dy} = s + a t$$

par suite

$$\frac{du}{dx} - a\frac{du}{dy} = r - a^2 t = 0$$

ce qui entraîne

$$u = f(y + a x)$$

de même on montrerait que l'on a en même temps

$$p - a q = f_1(y - a x)$$

Des équations (4) et (5) on déduit que p et q sont tous deux de la forme $\varphi(y + a x) + \varphi(y - a x)$

or $\quad z = \int p\,dx + q\,dy$; calculant cette intégrale on constate immédiatement qu'elle est encore de la même forme

Equation des surfaces développables.

Soit donnée l'équation différentielle partielle

$$r t - s^2 = 0$$

Si je pose comme précédemment

$$F(x, y, z, p, q) = 0$$

l'équation proposée, équivaut, en adoptant les mêmes notations, à

$$\frac{X + Zp + Qs}{P} \times \frac{Y + Zq + Ps}{Q} = s^2$$

ou $$\frac{(X+Zp)(Y+Zq)}{PQ}+s\left[\frac{P}{Q}(X+Zp)+\frac{Q}{P}(Y+Zq)\right]=0$$

Annulant le terme en s il vient

$$\frac{P}{Q}(X+Zp)+\frac{Q}{P}(Y+Zq)=0 \quad (1)$$

Cette équation peut être satisfaite si l'on prend à la fois

$$X=0$$
$$Y=0$$
$$Z=0$$

ces équations expriment que F est indépendant de x, y, z, et que la relation se réduit à

$$f(p, q)=0$$

réciproquement si p et q sont fonction l'un de l'autre l'équation proposée est satisfaite ; on sait que cette dernière relation exprime que la surface représentée par la fonction inconnue est développable.

On peut encore satisfaire à l'équation (1) en posant

$$X+pZ=0$$
$$Y+qZ=0$$

ces deux équations s'écrivent encore

$$\frac{dF}{dx}+p\frac{dF}{dz}=0$$
$$\frac{dF}{dy}+q\frac{dF}{dz}=0$$

La première entraîne que l'on ait

$$F=f(z-px)=\text{constante}$$

en supposant q et y constants

La deuxième entraîne

$F=f_1(z-qy)=C^{te}$ en supposant p et x constants,

Ces équations ne sont compatibles que si l'on a

$F=\varphi(z-px-qy)=C^{te}$

la constante est ici une certaine fonction des variables que nous avons supposées constantes dans les deux cas ; c'est-à-dire de p et de q.

la relation cherchée est donc de la forme

$$z - px - qy = F(p, q) \quad (2)$$

elle résulte de l'équation.

$$rt - s^2 = 0 \quad (3)$$

Cherchons si réciproquement l'équation (3) se déduit de l'équation (2)

Différentiant (2) il vient

$$-x\,dp - y\,dq = \frac{dF}{dp}\,dp + \frac{dF}{dq}\,dq$$

$$\text{ou} \quad \left(x + \frac{dF}{dp}\right)dp + \left(y + \frac{dF}{dq}\right)dq = 0 \quad (4)$$

Cette différentielle sera nulle, soit si l'on a à la fois

$$\begin{cases} dp = 0 \\ dq = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne $p = f(q)$ et $rt - s^2 = 0$

soit encore si l'on a

$$x + \frac{dF}{dp} = 0$$

$$y + \frac{dF}{dq} = 0$$

équations qui avec l'équation (2) définissent l'enveloppe de la série de surfaces à deux paramètres représentée par l'équation (2) où p et q sont considérés comme des paramètres variables.

Enfin l'équation (4) peut être encore satisfaite par l'un des deux systèmes de relations

$$\begin{cases} x + \dfrac{dF}{dp} = 0 \\ q = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + \dfrac{dF}{dq} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes correspond à des cylindres c'est-à-dire à des surfaces développables, et puisque l'une des dérivées p et q est nulle on a bien

$$rt - s^2 = 0$$

On n'a donc introduit qu'une solution étrangère, c'est l'enveloppe de la famille de surfaces à 2 paramètres.

32e Leçon.

Calcul des Probabilités. – Définitions. – Enumération des chances. – Jeu de rencontre – Règle des probabilités totales et composées. – Tir à la cible. – Problème des épreuves répétées.

Définition de la probabilité. – On appelle probabilité d'un événement incertain le rapport entre le nombre des cas favorables au résultat que l'on veut obtenir, au nombre total des cas possibles.

Exemple. – Lorsque l'on jette un dé, la probabilité pour que l'on amène une face déterminée $\frac{1}{6}$

Si l'on jette deux dés simultanément, la probabilité pour amener à la fois deux six est $\frac{1}{36}$, car il y a trente-six cas possibles, et un seul faisant sortir les deux six ; la probabilité pour que l'on amène 5 et 6 est $\frac{1}{18}$ car sur les 36 cas possibles il y en a deux qui réalisent ce résultat.

Tous les cas doivent être également probables. – Il faut nécessairement que tous les cas que l'on énumère soient également probables ; il ne faudrait pas dire dans l'exemple du jeu de dés par exemple : « il n'y a que deux cas possibles : celui dans lequel on amène le résultat attendu, et celui où on ne l'amène pas : donc la probabilité est $\frac{1}{2}$. » Cela serait manifestement absurde.

Dalembert avait proposé l'objection suivante : si, jouant à pile ou face on demande la probabilité pour que l'on amène pile deux fois de suite ; on peut dire qu'il y a 4 cas possibles ; que l'on amène deux fois face, deux fois pile ; face puis pile, et enfin pile puis face ; il y a

la constante est ici une certaine fonction des variables que nous avons supposées constantes dans les deux cas, c'est-à-dire de p et de q.

la relation cherchée est donc de la forme

$$z - px - qy = F(p, q) \quad (2)$$

elle résulte de l'équation.

$$rt - s^2 = 0 \quad (3)$$

Cherchons si réciproquement l'équation (3) se déduit de l'équation (2)

Différentiant (2) il vient

$$-x\,dp - y\,dq = \frac{dF}{dp}\,dp + \frac{dF}{dq}\,dq$$

$$\text{ou} \quad \left(x + \frac{dF}{dp}\right)dp + \left(y + \frac{dF}{dq}\right)dq = 0 \quad (4)$$

Cette différentielle sera nulle, soit si l'on a à la fois

$$\begin{cases} dp = 0 \\ dq = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne $p = f(q)$ et $rt - s^2 = 0$

soit encore si l'on a

$$x + \frac{dF}{dp} = 0$$

$$y + \frac{dF}{dq} = 0$$

équations qui avec l'équation (2) définissent l'enveloppe de la série de surfaces à deux paramètres représentée par l'équation (2) où p et q sont considérés comme des paramètres variables.

Enfin l'équation (4) peut être encore satisfaite par l'un des deux systèmes de relations

$$\begin{cases} x + \dfrac{dF}{dp} = 0 \\ q = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + \dfrac{dF}{dq} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes correspond à des cylindres c'est-à-dire à des surfaces développables, et puisque l'une des dérivées p et q est nulle on a bien

$$rt - s^2 = 0$$

On n'a donc introduit qu'une solution étrangère, c'est l'enveloppe de la famille de surfaces à 2 paramètres.

32e Leçon.

Calcul des Probabilités. — Définitions. — Enumération des chances. — Jeu de rencontre — Règle des probabilités totales et composées. — Tir à la cible. — Problème des épreuves répétées.

Définition de la probabilité. — On appelle probabilité d'un événement incertain le rapport entre le nombre des cas favorables au résultat que l'on veut obtenir, au nombre total des cas possibles.

Exemple. — Lorsque l'on jette un dé, la probabilité pour que l'on amène une face déterminée $\frac{1}{6}$

Si l'on jette deux dés simultanément, la probabilité pour amener à la fois deux six est $\frac{1}{36}$, car il y a trente-six cas possibles, et un seul faisant sortir les deux six; la probabilité pour que l'on amène 5 et 6 est $\frac{1}{18}$ car sur les 36 cas possibles il y en a deux qui réalisent ce résultat.

Tous les cas doivent être également probables. —
Il faut nécessairement que tous les cas que l'on énumère soient également probables; il ne faudrait pas dire dans l'exemple du jeu de dés par exemple: « il n'y a que deux cas possibles: celui dans lequel on amène le résultat attendu, et celui où on ne l'amène pas; donc la probabilité est $\frac{1}{2}$. » Cela serait manifestement absurde.

Dalembert avait proposé l'objection suivante: si, jouant à pile ou face on demande la probabilité pour que l'on amène pile deux fois de suite; on peut dire qu'il y a 4 cas possibles; que l'on amène deux fois face, deux fois pile; face puis pile, et enfin pile puis face; il y a

la constante est ici une certaine fonction des variables que nous avons supposées constantes dans les deux cas, c'est-à-dire de p et de q.

la relation cherchée est donc de la forme

$$z - px - qy = F(p, q) \quad (2)$$

elle résulte de l'équation.

$$rt - s^2 = 0 \quad (3)$$

Cherchons si réciproquement l'équation (3) se déduit de l'équation (2)

Différentiant (2) il vient

$$-x\,dp - y\,dq = \frac{dF}{dp}\,dp + \frac{dF}{dq}\,dq$$

$$\text{ou} \quad \left(x + \frac{dF}{dp}\right)dp + \left(y + \frac{dF}{dq}\right)dq = 0 \quad (4)$$

Cette différentielle sera nulle, soit si l'on a à la fois

$$\begin{cases} dp = 0 \\ dq = 0 \end{cases}$$

ce qui entraîne $p = f(q)$ et $rt - s^2 = 0$

soit encore si l'on a

$$x + \frac{dF}{dp} = 0$$

$$y + \frac{dF}{dq} = 0$$

équations qui avec l'équation (2) définissent l'enveloppe de la série de surfaces à deux paramètres représentée par l'équation (2) où p et q sont considérés comme des paramètres variables.

Enfin l'équation (4) peut être encore satisfaite par l'un des deux systèmes de relations

$$\begin{cases} x + \dfrac{dF}{dp} = 0 \\ q = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y + \dfrac{dF}{dq} = 0 \\ p = 0 \end{cases}$$

Chacun de ces systèmes correspond à des cylindres c'est-à-dire à des surfaces développables, et puisque l'une des dérivées p et q est nulle on a bien

$$rt - s^2 = 0$$

On n'a donc introduit qu'une solution étrangère, c'est l'enveloppe de la famille de surfaces à 2 paramètres.

32e Leçon.

Calcul des Probabilités. – Définitions. – Enumération des chances. – Jeu de rencontre – Règle des probabilités totales et composées. – Tir à la cible. – Problème des épreuves répétées.

Définition de la probabilité. – On appelle probabilité d'un évènement incertain le rapport entre le nombre des cas favorables au résultat que l'on veut obtenir, au nombre total des cas possibles.

Exemple. – Lorsque l'on jette un dé, la probabilité pour que l'on amène une face déterminée $\frac{1}{6}$

Si l'on jette deux dés simultanément, la probabilité pour amener à la fois deux six est $\frac{1}{36}$, car il y a trente-six cas possibles, et un seul faisant sortir les deux six; la probabilité pour que l'on amène 5 et 6 est $\frac{1}{18}$ car sur les 36 cas possibles il y en a deux qui réalisent ce résultat.

Tous les cas doivent être également probables. – Il faut nécessairement que tous les cas que l'on énumère soient également probables; il ne faudrait pas dire dans l'exemple du jeu de dés par exemple: « il n'y a que deux cas possibles: celui dans lequel on amène le résultat attendu, et celui où on ne l'amène pas; donc la probabilité est $\frac{1}{2}$. » Cela serait manifestement absurde.

Dalembert avait proposé l'objection suivante: si, jouant à pile ou face on demande la probabilité pour que l'on amène pile deux fois de suite; on peut dire qu'il y a 4 cas possibles: que l'on amène deux fois face, deux fois pile; face puis pile, et enfin pile puis face; il y a

4 cas possibles, un seul est favorable donc la probabilité est $\frac{1}{4}$ — D'autre part on peut aussi dire à la première épreuve on amènera soit face soit pile, si l'on amène face on a perdu et l'on ne continue pas, si l'on amène pile on continue au contraire et il peut alors se présenter deux cas dont un est favorable ; ce qui ne fait en tout que trois cas et ce qui donne la probabilité égale à $\frac{1}{3}$; ce dernier raisonnement est faux parce que le premier des trois cas est plus probable que les deux autres, il est aussi probable que l'ensemble des deux autres. — Tandis que dans le premier raisonnement on a considéré 4 cas également probables. La même chose se présente dans l'exemple suivant.

Soit deux joueurs jouant aux boules, c'est-à-dire cherchant à lancer une boule le plus près possible d'un but ; si l'un des joueurs a une boule à lancer et l'autre deux, il est évident que (en supposant les joueurs également habiles) la probabilité pour que le premier gagne est $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ pour le second ; car il y a trois cas également probables, suivant que c'est l'une ou l'autre des trois boules qui parvient le plus près du but.

On a proposé l'objection suivante : supposons que le premier joueur lance d'abord sa boule, puis que le deuxième lance successivement ses deux boules il peut les placer toutes les deux mieux que la précédente, toutes les deux plus mal, la première mieux et la deuxième plus mal, ou enfin la première plus mal et la deuxième mieux ; cela fait quatre cas possibles, dont trois sont favorables au deuxième joueur et un seul au premier, les probabilités pour qu'ils gagnent seraient donc respectivement $\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4}$ — Ce dernier raisonnement est inexact car la position de la première boule du deuxième joueur indique si celle du premier est bien ou mal placée et par suite indique comment il est probable que le deuxième joueur placera sa deuxième boule, c'est-à-dire encore que les deux premiers cas énumérés sont plus probables que les deux derniers.

Soit encore l'exemple suivant : on prend trois

cartes, un six, un sept et un huit, on les place retournées sur une table, et on les présente à quelqu'un après les avoir retournées et en n'en laissant voir qu'une moitié si l'on aperçoit la figure répondant au six coupé en deux elle peut aussi être due à la moitié inférieure du sept et les probabilités pour que ce soit un six ou un sept sont respectivement $\frac{2}{3}$ et $\frac{1}{3}$; de même si on aperçoit la figure relative au huit coupé en deux, elle peut provenir du huit (probabilité $\frac{2}{3}$) ou de la moitié supérieure du sept (probabilité $\frac{1}{3}$).

Dans les cas qui précèdent le calcul de la probabilité se ramène à un calcul plus ou moins compliqué de combinaisons, tel est le cas du problème suivant.

Problème du jeu de rencontre.—

Une urne contient μ numéros que l'on tire, en même temps que l'on énonce au hasard l'un de ces μ numéros; quelle est la probabilité pour que l'on énonce un numéro en même temps que l'on tire ce même numéro.

Nous supposerons par exemple que l'urne contienne les μ premiers numéros et qu'on les énonce dans l'ordre naturel des nombres, cela n'altère évidemment pas la probabilité cherchée — Dans ces conditions les μ numéros tirés de l'urne sont susceptibles d'un nombre de permutations égal à

$$1.2.3\ldots\ldots(\mu-1)\mu = \Gamma(\mu+1)$$

Cherchons parmi toutes ces permutations combien il y en pour lesquelles aucun numéro ne sort à son rang.

Parmi toutes les permutations il y en a évidemment $1.2\ldots(\mu-1)$ pour lesquelles un numéro déterminé i est à son rang; il y en a donc en tout un nombre égal à $\Gamma(\mu+1)-\Gamma(\mu)$ où i n'est pas à sa place; parmi toutes ces permutations il y en a un certain nombre où un autre numéro j est à sa place, et il se déduit comme précédemment du nombre total des permutations à considérer en diminuant μ d'une unité; il est égal à $\Gamma(\mu)-\Gamma(\mu-1)$ il reste donc

$\Gamma(\mu+1)-\Gamma(\mu)-[\Gamma(\mu)-\Gamma(\mu-1)]$ où ni i ni j ne sont à leur place –

Ce nombre est égal à

$$\Gamma(\mu+1)-2\,\Gamma(\mu)+\Gamma(\mu-1)$$

On verrait de même que le nombre des permutations où aucun de 3 numéros déterminés ne sont à leur place est égal à

$$\Gamma(\mu+1)-3\,\Gamma(\mu)+3\,\Gamma(\mu-1)-\Gamma(\mu-2)$$

Les coefficients successifs qui s'introduisent sont ceux du développement de $(1-x)^p$, p étant le nombre des numéros qu'on ne suppose pas à leur place.

Donc le nombre des permutations où aucun numéro ne se trouvera à sa place sera égal à

$$\Gamma(\mu+1)-\mu\,\Gamma(\mu)+\frac{\mu(\mu-1)}{2}\,\Gamma(\mu-1)\cdots+\frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-p+1)}{1\,2\cdots p}\,\Gamma(\mu-p+1)\cdots$$

Mais on a

$$\mu\,\Gamma(\mu)=\Gamma(\mu+1)$$

$$\mu(\mu-1)\,\Gamma(\mu-1)=\Gamma(\mu+1)$$

$$\vdots$$

$$\mu(\mu-1)\cdots(\mu-p+1)\,\Gamma(\mu-p+1)=\Gamma(\mu+1)$$

D'autre part pour obtenir la probilité pour que l'on ne gagne pas s'obtient en divisant le nombre précédent par le nombre total des permutations qui est égal à $\Gamma(\mu+1)$

Cette probabilité est donc égale à

$$1-1+\frac{1}{1.2.}-\frac{1}{1.2.3.}\cdots\cdots(-1)^p\frac{1}{1\,2\cdots\cdots p}\cdots\cdots\cdots(-1)^\mu\frac{1}{1\,2\cdots\cdots\mu}$$

Lorsque μ est très grand ce nombre diffère fort peu de

$$e^{-1}=\frac{1}{e}$$

Telle est la probabilité pour que l'on perde, la probabilité pour que l'on gagne est alors

$1-\frac{1}{e}$; elle est très-voisine de 0.66

Problème du passe-dix

Un joueur jette simultanément trois dés, il gagne si la somme des points qu'il amène est supérieure à dix et il perd si elle est inférieure ou égale à dix.

On demande qu'elle est la probabilité pour qu'il gagne.

Le nombre des cas possibles est évidemment égal au nombre des arrangements avec répétitions des six points figurés sur les faces des dés, trois à trois; il est égal à

$$6^3 = 216$$

On reconnaît aisément que parmi ces 216 arrangements il y en a 108 pour lesquels la somme est supérieure à dix et 108 pour lesquels elle est inférieure ou égale; la probabilité pour que le joueur gagne est donc $\frac{1}{2}$, le jeu est dit équitable.

On peut le reconnaître immédiatement ainsi; étant donné l'un des arrangements, si l'on considère celui qui est formé par les faces opposées des dés, la somme des deux totaux relatifs à ces arrangements est égale à 21 (puisque la somme des points inscrits sur deux faces opposées est toujours égale à 7), donc si l'un de ces arrangements donne une somme supérieure à dix, l'autre en donne une inférieure ou égale; il y a donc exactement autant d'arrangements répondant au premier cas qu'au deuxième et le jeu est bien équitable.

On a souvent à se servir dans le calcul des probabilités des deux règles suivantes.

Règle des probabilités totales.

Lorsqu'un événement est possible de plusieurs manières, c'est-à-dire peut-être causé nécessairement, par plusieurs autres séparément, la probabilité pour que le premier événement se produise est la somme des probabilités partielles pour que chacun des autres se produise.

Cette règle est évidente, elle correspond à l'addition de fractions de même dénominateur.

Il faut cependant prendre garde dans l'application de cette règle de ne pas oublier de cas, ou de ne pas en compter deux fois.

Si par exemple on demande quelle est la probabilité pour que, jetant n fois de suite deux dés,

on amène une fois les deux six en même temps (sonnez), on pourrait penser que la probabilité étant à chaque fois $\frac{1}{36}$ la probabilité totale sera $\frac{n}{36}$, et que par conséquent on aurait la certitude absolue d'amener une fois les deux six en 36 coups ; cela n'est pas exact.

Règle des probabilités composées.-

Si un événement est le résultat de deux autres qui doivent arriver simultanément pour que l'événement considéré puisse se produire, la probabilité du premier événement est le produit des probabilités des deux autres.

Soit par exemple deux urnes contenant des boules blanches et noires, m blanches et n noires pour la première, m' et n' pour la deuxième.

La probabilité pour tirer une blanche de la première est $\frac{m}{m+n}$, pour en tirer une de la deuxième elle est $\frac{m'}{m'+n'}$, pour que l'on tire simultanément une blanche de chacune des deux urnes, la probabilité est

$\frac{m\,m'}{(m+n)(m'+n')}$; cela est évident car le nombre total des cas possibles est $(m+n)(m'+n')$ et celui des cas favorables est $m\,m'$.

Cette démonstration est absolument générale car on peut représenter tout événement de probabilité $\frac{p}{q}$ par le tirage d'une blanche dans une urne contenant en tout q boules dont p blanches.

Cette règle des probabilités composées n'est applicable que lorsque les événements considérés sont indépendants l'un de l'autre et que l'arrivée du premier ne peut influer en rien sur celle du deuxième.

Si on considère par exemple une urne contenant 2 boules blanches et deux noires et que l'on demande quelle est la probabilité pour que l'on tire successivement deux blanches, il ne faudrait pas dire qu'elle est $\frac{1}{4}$ parce que la probabilité de tirer une blanche à chaque épreuve est $\frac{1}{2}$; en effet au deuxième tirage la probabilité pour tirer une blanche n'est plus que de $\frac{1}{3}$ si la première boule tirée était blanche, et elle est de $\frac{2}{3}$ si la première était noire ; la probabilité de tirer deux blanches successivement n'est donc que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Considérons encore un jeu de 32 cartes, tirons en cinq par exemple ; la probabilité pour que la première soit rouge est $\frac{1}{2}$, pour la 2ème (la 1ère étant supposée rouge) elle est $\frac{15}{31}$, pour la 3ème $\frac{14}{30}$, la 4ème $\frac{13}{29}$, la 5ème $\frac{12}{28}$ (toutes les précédentes étant supposées rouges) la probabilité pour tirer 5 rouges de suite est donc égale à $\frac{12\times 13\times 14\times 15}{28\times 29\times 30\times 31\times 32}$; c'est encore la probabilité pour qu'il n'y ait pas une seule noire dans les 5 premières cartes tirées –

La probabilité pour qu'il n'y ait pas une seule rouge serait évidemment la même ; mais il ne faudrait pas en conclure que la probabilité pour qu'il n'y ait ni rouge ni noire est le produit des deux précédentes, car ce cas ne saurait se présenter ; les deux événements ne sont en effet pas indépendants.

Probabilité dans le tir à la cible.–

Supposons un tireur tirant avec une arme parfaite et n'ayant aucune disposition à tirer régulièrement d'un côté, plutôt que de l'autre, nous admettrons alors que la probabilité pour qu'il parvienne à une distance déterminée du but n'est fonction que de cette distance.

Soit M le point où la balle est supposée parvenir et x, y ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires passant par le centre de la cible je considère la probabilité pour atteindre à l'intérieur d'un rectangle compris entre les droites x, $x+dx$, y, $y+dy$

(Car la probabilité pour atteindre un point géométrique serait nulle), c'est d'après ce qui précède le produit des probabilités $\varphi(x)\,dx$ et $\varphi(y)\,dy$ pour atteindre à la fois à l'intérieur de la bande, x, $x+dx$ et de la bande y, $y+dy$; cette probabilité est donc $\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$; d'autre part elle ne doit dépendre que de la distance OM et être proportionnelle à l'aire du rectangle, elle est donc aussi de la forme $F(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Cela permet de déterminer la fonction φ ; en effet on aura

$$\varphi(x)\varphi(y)=F(x^2+y^2)$$

on amène une fois les deux six en même temps (Jonnez), on pourrait penser que la probabilité étant à chaque fois $\frac{1}{36}$ la probabilité totale sera $\frac{n}{36}$, et que par conséquent on aurait la certitude absolue d'amener une fois les deux six en 36 coups ; cela n'est pas exact.

Règle des probabilités composées.-

Si un événement est le résultat de deux autres qui doivent arriver simultanément pour que l'événement considéré puisse se produire, la probabilité du premier événement est le produit des probabilités des deux autres.

Soit par exemple deux urnes contenant des boules blanches et noires, m blanches et n noires pour la première, m' et n' pour la deuxième.

La probabilité pour tirer une blanche de la première est $\frac{m}{m+n}$, pour en tirer une de la deuxième elle est $\frac{m'}{m'+n'}$, pour que l'on tire simultanément une blanche de chacune des deux urnes, la probabilité est

$\frac{m\,m'}{(m+n)(m'+n')}$; cela est évident car le nombre total des cas possibles est $(m+n)(m'+n')$ et celui des cas favorables est $m\,m'$.

Cette démonstration est absolument générale car on peut représenter tout événement de probabilité $\frac{p}{q}$ par le tirage d'une blanche dans une urne contenant en tout q boules dont p blanches.

Cette règle des probabilités composées n'est applicable que lorsque les événements considérés sont indépendants l'un de l'autre et que l'arrivée du premier ne peut influer en rien sur celle du deuxième.

Si on considère par exemple une urne contenant 2 boules blanches et deux noires et que l'on demande quelle est la probabilité pour que l'on tire successivement deux blanches, il ne faudrait pas dire qu'elle est $\frac{1}{4}$ parce que la probabilité de tirer une blanche à chaque épreuve est $\frac{1}{2}$; en effet au deuxième tirage la probabilité pour tirer une blanche n'est plus que de $\frac{1}{3}$ si la première boule tirée était blanche, et elle est de $\frac{2}{3}$ si la première était noire ; la probabilité de tirer deux blanches successivement n'est donc que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Considérons encore un jeu de 32 cartes, tirons en cinq par exemple ; la probabilité pour que la première soit rouge est $\frac{1}{2}$, pour la 2ème (la 1ère étant supposée rouge) elle est $\frac{15}{31}$, pour la 3ème $\frac{14}{30}$, la 4ème $\frac{13}{29}$, la 5ème $\frac{12}{28}$ (toutes les précédentes étant supposées rouges) la probabilité pour tirer 5 rouges de suite est donc égale à $\frac{12\times13\times14\times15}{28\times29\times30\times31\times32}$; c'est encore la probabilité pour qu'il n'y ait pas une seule noire dans les 5 premières cartes tirées –

La probabilité pour qu'il n'y ait pas une seule rouge serait évidemment la même ; mais il ne faudrait pas en conclure que la probabilité pour qu'il n'y ait ni rouge ni noire est le produit des deux précédentes, car ce cas ne saurait se présenter ; les deux événements ne sont en effet pas indépendants.

Probabilité dans le tir à la cible. –

Supposons un tireur tirant avec une arme parfaite et n'ayant aucune disposition à tirer régulièrement d'un côté, plutôt que de l'autre, nous admettrons alors que la probabilité pour qu'il parvienne à une distance déterminée du but n'est fonction que de cette distance –

Soit M le point où la balle est supposée parvenir et x, y ses coordonnées par rapport à deux axes rectangulaires passant par le centre de la cible je considère la probabilité pour atteindre à l'intérieur d'un rectangle compris entre les droites x, $x+dx$, y, $y+dy$ (Car la probabilité pour atteindre un point géométrique serait nulle), c'est d'après ce qui précède le produit des probabilités $\varphi(x)\,dx$ et $\varphi(y)\,dy$ pour atteindre à la fois à l'intérieur de la bande, x, $x+dx$ et de la bande y, $y+dy$; cette probabilité est donc $\varphi(x)\varphi(y)\,dx\,dy$; d'autre part elle ne doit dépendre que de la distance OM et être proportionnelle à l'aire du rectangle, elle est donc aussi de la forme $F(x^2+y^2)\,dx\,dy$.

Cela permet de déterminer la fonction φ ; en effet on aura

$$\varphi(x)\varphi(y)=F(x^2+y^2)$$

ou en dérivant

$$\varphi'(x)\varphi(y) = 2x F'$$

$$\varphi'(x)\varphi'(y) = 2y F'$$

et

$$\frac{\varphi'(x)\varphi(y)}{\varphi(x)\varphi'(y)} = \frac{x}{y}$$

ou

$$\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{y\varphi(y)} = \text{constante}$$

On a donc

$$\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = 2a$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi x} = 2ax$$

$$L\,\varphi(x) = ax^2 + b$$

et $\varphi(x) = Ge^{ax^2}$

La constante a est d'ailleurs négative car il faut que la probabilité diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre de la cible ; on peut donc encore poser

$$\varphi(x) = Ge^{-h^2x^2}$$

Pour déterminer la constante G je remarque que la probabilité pour que la balle parvienne entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$ est égale à 1 ; c'est d'ailleurs la somme des probabilités partielles pour qu'elle parvienne à l'intérieur de chaque bande d'épaisseur dx ; on a donc

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} Ge^{-h^2x^2}dx = \frac{G}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}d(hx) = \frac{G\sqrt{\pi}}{h}$$

D'où $G = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

L'application de la règle des probabilités composées n'est pas légitime dans ce calcul, car si par exemple l'écart suivant ox est considérable cela implique que le coup est mauvais et rend un-

écart suivant oy beaucoup plus probable que si le coup était bien en ligne ; les deux événements écart latéral et écart en hauteur ne sont pas indépendants.

Problème des épreuves répétées.-

Soit deux événements qui s'excluent l'un l'autre, mais tels que si l'un ne se produit pas, l'autre se produit nécessairement, et soit p et q leurs probabilités respectives (le principe des probabilités totales exige $p+q=1$) - On fait μ épreuves et l'on demande quelle est la probabilité pour que le premier se produise n fois, et par suite le deuxième $\mu-n$ fois.

Je suppose que je fixe l'ordre dans lequel ces μ événements doivent se succéder ; la probabilité pour qu'ils se produisent dans cet ordre est égale à $p^n q^{\mu-n}$ (en raison de la règle des probabilités composées car pour la production de chacun des n premiers événements au rang assigné on a la probabilité p, et pour les autres la probabilité q on aura donc à faire le produit de n facteurs p et $\mu-n$ facteurs q) - Or le nombre des ordres différents possibles serait égal à $1.2.3\ldots\ldots\mu$ si tous les événements étaient distincts, mais comme n d'entre eux sont identiques, on aura une série d'ordres qui ne diffèrent que par l'échange de deux événements identiques c'est-à-dire qui se confondent, cela divise le nombre total par le nombre $1.2\ldots n$ des permutations de ces n événements entre eux ; l'identité des $\mu-n$ autres événements divise encore le nombre par le facteur $1.2\ldots\ldots\mu-n$; il y a donc en tout un nombre d'ordres différents égal à

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2.3\ldots n\ 1.2.3\ldots\mu-n}$$

La probabilité pour que les n premiers événements se produisent d'un côté, et les $\mu-n$ autres de l'autre est alors égal au produit

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2\ldots n.1.2\ldots\ldots\mu-n}p^n q^{\mu-n} = \frac{\mu(\mu-1)\ldots\mu-n+1}{1.2\ldots\ldots n}p^n q^{\mu-n}.$$

ce nombre est égal à l'un des termes du développement de $(p+q)^{\mu}$

Ce développement reproduit des nombres égaux aux

ou en dérivant

$$\varphi'(x)\varphi(y) = 2x F'$$

$$\varphi'(x)\varphi'(y) = 2y F'$$

et

$$\frac{\varphi'(x)\varphi(y)}{\varphi(x)\varphi'(y)} = \frac{x}{y}$$

ou

$$\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = \frac{\varphi'(y)}{y\varphi(y)} = \text{constante}$$

On a donc

$$\frac{\varphi'(x)}{x\varphi(x)} = 2a$$

$$\frac{\varphi'(x)}{\varphi x} = 2ax$$

$$L\varphi(x) = ax^2 + b$$

et $\varphi(x) = Ge^{ax^2}$

La constante a est d'ailleurs négative car il faut que la probabilité diminue à mesure que l'on s'éloigne du centre de la cible ; on peut donc encore poser

$$\varphi(x) = Ge^{-h^2x^2}$$

Pour déterminer la constante G je remarque que la probabilité pour que la balle parvienne entre $x = -\infty$ et $x = +\infty$ est égale à 1 ; c'est d'ailleurs la somme des probabilités partielles pour qu'elle parvienne à l'intérieur de chaque bande d'épaisseur dx ; on a donc

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} Ge^{-h^2x^2}dx = \frac{G}{h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h^2x^2}d(hx) = \frac{G\sqrt{\pi}}{h}$$

D'où $G = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$

L'application de la règle des probabilités composées n'est pas légitime dans ce calcul, car si par exemple l'écart suivant ox est considérable cela implique que le coup est mauvais et rend un

écart suivant oy beaucoup plus probable que si le coup était bien en ligne ; les deux événements écart latéral et écart en hauteur ne sont pas indépendants.

Problème des épreuves répétées.-

Soit deux événements qui s'excluent l'un l'autre, mais tels que si l'un ne se produit pas, l'autre se produit nécessairement, et soit P et q leurs probabilités respectives (le principe des probabilités totales exige $P+q=1$) - On fait μ épreuves et l'on demande quelle est la probabilité pour que le premier se produise n fois, et par suite le deuxième $\mu-n$ fois.

Je suppose que je fixe l'ordre dans lequel ces μ événements doivent se succéder; la probabilité pour qu'ils se produisent dans cet ordre est égale à $P^n q^{\mu-n}$ (en raison de la règle des probabilités composées car pour la production de chacun des n premiers événements au rang assigné on a la probabilité P, et pour les autres la probabilité q on aura donc à faire le produit de n facteurs P et $\mu-n$ facteurs q) - Or le nombre des ordres différents possibles serait égal à $1.2.3\ldots\ldots\mu$ si tous les événements étaient distincts, mais comme n d'entre eux sont identiques, on aura une série d'ordres qui ne diffèrent que par l'échange de deux événements identiques c'est-à-dire qui se confondent, cela divise le nombre total par le nombre $1.2\ldots n$ des permutations de ces n événements entre eux; l'identité des $\mu-n$ autres événements divise encore le nombre par le facteur $1.2\ldots\ldots\mu-n$; il y a donc en tout un nombre d'ordres différents égal à

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2.3\ldots n\;1.2.3\ldots\mu-n}$$

La probabilité pour que les n premiers événements se produisent d'un côté, et les $\mu-n$ autres de l'autre est alors égal au produit

$$\frac{1.2.3\ldots\ldots\mu}{1.2.\ldots n.1.2\ldots\ldots\mu\,n}P^n q^{\mu-n}=\frac{\mu(\mu-1)\ldots\mu-n+1}{1.2.\ldots n}P^n q^{\mu-n}.$$

ce nombre est égal à l'un des termes du développement de $(P+q)^{\mu}$

Ce développement reproduit des nombres égaux aux

probabilités relatives à l'arrivée de chacun des deux événements en toutes proportions ; la somme de ces nombres est bien égale à l'unité comme cela était évident à priori.

La répartition la plus probable des événements entre ceux de probabilité p et ceux de probabilité q correspond à la valeur de n qui donne le plus grand terme du développement. Pour trouver ce terme je considère le quotient d'un terme par le précédent il est égal à $\frac{\mu-n+1}{n}\frac{p}{q}$ le terme considéré est donc supérieur au précédent si l'on a

$$\frac{\mu-n+1}{n}\frac{p}{q} > 1$$

il sera supérieur aussi au suivant si l'on a

$$\frac{\mu-n}{n+1}\frac{p}{q} < 1$$

La 1ère équivaut à

$$(\mu+1)p > n(p+q) \quad \text{ou} \quad \mu p > n-p$$

et la 2ème à

$$\mu p < n(p+q)+q \quad \text{ou} \quad \mu p < n+q$$

On a donc simultanément

$$n-p < \mu p < n+q$$

n doit être entier et comme p et q sont deux fractions plus petites que l'unité on voit qu'il faudra prendre n égal à μp si μ est entier, ou bien égal à l'entier immédiatement inférieur ou supérieur à μp suivant le cas.

Si nous supposons que μp est entier nous prendrons

$$n = \mu p$$

et

$$\mu - n = \mu(1-p) = \mu q$$

On voit donc que n et $\mu-n$ seront respectivement proportionnels aux probabilités p et q.

La probabilité pour que les deux événements se produisent ainsi est alors

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots\mu}{1.2.3\ldots\mu p.1.2\ldots\mu q}\, p^{\mu p} q^{\mu q}$$

Mais si μ est très grand on sait que l'on a sensiblement.

$$1.2.3 \ldots\ldots \mu = e^{-\mu} \mu^{\mu} \sqrt{2\pi\mu}$$

$$1.2 \ldots\ldots \mu = e^{-\mu p} (\mu p)^{\mu p} \sqrt{2\pi\mu p}$$

$$1.2 \ldots\ldots \mu = q = e^{-\mu q} (\mu q)^{\mu q} \sqrt{2\pi\mu q}$$

Portant dans l'expression de la probabilité précédente il vient la valeur approchée

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$$

μ étant en dénominateur on voit que cette probabilité diminue lorsque μ augmente et tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment.

33e Leçon.

Espérance mathématique – Calcul des probabilités par la considération de l'espérance mathématique – Problème de la ruine des joueurs.

Espérance mathématique. – L'espérance mathématique d'un joueur qui attend une somme s dont le gain est incertain, est égale au produit de la somme par la probabilité qu'il a de gagner cette somme. Ce produit est souvent aussi appelé le sort du joueur – Il représente encore la valeur équitable des chances du joueur, et dans tout jeu équitable, il doit être égal à la mise du joueur –

Ces principes peuvent être justifiés ainsi qu'il suit; si m joueurs jouent avec des chances égales de gagner un enjeu S; la probabilité pour que l'un d'entre eux gagne est $\frac{1}{m}$, donc d'après la définition précédente son espérance mathématique est $\frac{S}{m}$, et c'est bien la mise qu'il a dû donner si le jeu est équitable.

Pour passer au cas où les probabilités pour que les différents joueurs gagnent ne sont plus les mêmes

probabilités relatives à l'arrivée de chacun des deux événements en toutes proportions; la somme de ces nombres est bien égale à l'unité comme cela était évident à priori.

La répartition la plus probable des événements entre ceux de probabilité p et ceux de probabilité q correspond à la valeur de n qui donne le plus grand terme du développement. Pour trouver ce terme je considère le quotient d'un terme par le précédent il est égal à $\frac{\mu-n+1}{n}\frac{p}{q}$ le terme considéré est donc supérieur au précédent si l'on a

$$\frac{\mu-n+1}{n}\frac{p}{q} > 1$$

il sera supérieur aussi au suivant si l'on a

$$\frac{\mu-n}{n+1}\frac{p}{q} < 1$$

La 1ère équivaut à

$$(\mu+1)p > n(p+q) \quad \text{ou} \quad \mu p > n-p$$

et la 2ème à

$$\mu p < n(p+q)+q \quad \text{ou} \quad \mu p < n+q$$

On a donc simultanément

$$n-p < \mu p < n+q$$

n doit être entier et comme p et q sont deux fractions plus petites que l'unité on voit qu'il faudra prendre n égal à μp si μ est entier, ou bien égal à l'entier immédiatement inférieur ou supérieur à μp suivant le cas.

Si nous supposons que μp est entier nous prendrons

$$n = \mu p$$

et

$$\mu - n = \mu(1-p) = \mu q$$

On voit donc que n et $\mu - n$ seront respectivement proportionnels aux probabilités p et q.

La probabilité pour que les deux événements se produisent ainsi est alors

$$\frac{1.2.3.\ldots\ldots\mu}{1.2.3\ldots\mu p.1.2\ldots\mu q}\, p^{\mu p} q^{\mu q}$$

Mais si μ est très grand on sait que l'on a sensiblement.

$$1.2.3 \ldots\ldots \mu = e^{-\mu} \mu^{\mu} \sqrt{2\pi\mu}$$

$$1.2 \ldots\ldots \mu = e^{-\mu p} (\mu p)^{\mu p} \sqrt{2\pi\mu p}$$

$$1.2 \ldots\ldots \mu = q = e^{-\mu q} (\mu q)^{\mu q} \sqrt{2\pi\mu q}$$

Portant dans l'expression de la probabilité précédente il vient la valeur approchée

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$$

μ étant en dénominateur on voit que cette probabilité diminue lorsque μ augmente et tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment.

33e Leçon.

Espérance mathématique — Calcul des probabilités par la considération de l'espérance mathématique — Problème de la ruine des joueurs.

Espérance mathématique. — L'espérance mathématique d'un joueur qui attend une somme s dont le gain est incertain, est égale au produit de la somme par la probabilité qu'il a de gagner cette somme. Ce produit est souvent aussi appelé le sort du joueur — Il représente encore la valeur équitable des chances du joueur, et dans tout jeu équitable, il doit être égal à la mise du joueur —

Ces principes peuvent être justifiés ainsi qu'il suit; si m joueurs jouent avec des chances égales de gagner un enjeu S; la probabilité pour que l'un d'entre eux gagne est $\frac{1}{m}$, donc d'après la définition précédente son espérance mathématique est $\frac{S}{m}$, et c'est bien la mise qu'il a dû donner si le jeu est équitable.

Pour passer au cas où les probabilités pour que les différents joueurs gagnent ne sont plus les mêmes

nous supposerons que p joueurs se soient associés ; la probabilité pour que le groupe ainsi formé gagne la somme s est évidemment $\frac{p}{m}$, l'espérance mathématique est $p\frac{s}{m}$, et la somme qu'ils ont dû miser est bien $\frac{ps}{m}$.

Si les conditions du jeu permettent au joueur de gagner suivant les cas diverses sommes $s_1, s_2 \ldots s_n$ et que les probabilités pour qu'ils les gagnent sont $p_1, p_2 \ldots p_n$, son espérance mathématique sera par définition $p_1 s_1 + p_2 s_2 \ldots + p_n s_n$. Elle est la somme des espérances mathématiques relatives à chacune des sommes, à condition que les gains de ces sommes soient indépendants les uns des autres. On peut imaginer que le joueur cède successivement ses droits sur chacune des sommes à des tiers, cette vente se faisant équitablement moyennant les diverses sommes $p_1 s_1, p_2 s_2 \ldots p_n s_n$

La recherche de l'espérance mathématique est intimement liée à celle des probabilités lorsque l'on connaît les probabilités de gagner diverses sommes on peut par suite de la définition même calculer l'espérance mathématique ; mais il arrive souvent que l'on puisse calculer celle-ci indépendamment des probabilités et d'une manière plus simple.

Si nous revenons au problème du jeu de rencontre nous avons calculé la probabilité pour qu'il y ait au moins une rencontre ; mais nous n'avons pas calculé les probabilités pour qu'il y ait une seule rencontre, deux rencontres, ... μ rencontres.

Supposons que l'on demande quelle est l'espérance mathématique d'un joueur qui devrait toucher un franc par rencontre ; elle est évidemment égale à

$$p_1 + 2p_2 \ldots\ldots \mu p_\mu$$

$p_1, p_2 \ldots\ldots p_\mu$ étant les probabilités pour qu'il y ait une seule rencontre, deux rencontres ...... μ rencontres nous ne connaissons pas ces diverses probabilités, il est cependant facile de calculer l'espérance mathématique du joueur ; en effet elle est la somme des espérances relatives à chacun des numéros, or la probabilité pour qu'un numéro déterminé sort à son rang $\frac{1}{\mu}$, l'espérance mathématique correspondante est aussi $\frac{1}{\mu}$ et

par suite l'espérance totale du joueur est $\mu \times \frac{1}{\mu} = 1$

On a donc entre les probabilités inconnues $P_1, P_2 \dots P_\mu$ la relation

$$P_1 + 2P_2 \dots\dots + \mu P_\mu = 1$$

Si nous supposons par exemple que l'urne contienne trois numéros : 1, 2, 3, ils peuvent sortir suivant 6 ordres différents qui sont les suivants.

1, 2, 3.
1, 3, 2.
2, 1, 3.
2, 3, 1.
3, 1, 2.
3, 2, 1.

le premier donne 3 rencontres, le 2e le 3e et le 6e chacun une et les deux autres aucune ; les espérances mathématiques relatives à ces diverses combinaisons sont alors $\frac{3}{6}$ pour la première $\frac{1}{6}$ pour la 2ème, 3e et 6e, 0 pour les deux autres, leur somme est bien l'unité.

Problème. — Une urne contient μ numéros que l'on tire au hasard et que l'on écrit dans l'ordre de sortie quelle est l'espérance mathématique d'un joueur qui recevrait 1 franc par chaque maximum et chaque minimum que présentera la liste.

D'après la définition on devrait chercher les probabilités pour que la liste présente P maximums et q minimums (pour tous les systèmes de valeurs acceptables de P et q) multiplier ces probabilités par $P+q$ et ajouter. Il est beaucoup plus simple de raisonner ainsi : supposons que le joueur vende successivement les chances qu'il a de gagner avec chacun des μ numéros à leur valeur équitable, son espérance mathémathique s'obtiendra en ajoutant les diverses sommes qu'il recevra ainsi.

Le premier et le dernier numéros exceptés la probabilité pour qu'un numéro quelconque soit supérieur aux deux voisins est $\frac{1}{3}$, pour qu'il soit inférieur à tous deux elle est aussi $\frac{1}{3}$; donc l'espérance mathématique relative à ce numéro est $\frac{2}{3}$ et l'espérance mathématique totale est

$$\frac{2}{3}(\mu - 2).$$

Problème de l'aiguille.-

Considérons sur un plan une série de lignes parallèles équidistantes à distance $2a$; on jette sur le plan une aiguille de longueur $2l$ (on supposera $l < a$) et on demande la probabilité pour que l'aiguille coupe l'une des parallèles.

Le problème ainsi posé est assez compliqué, on peut le résoudre très simplement par la considération de l'espérance mathématique.

En effet considérons l'espérance mathématique d'un joueur qui recevrait 1 franc chaque fois que l'aiguille rencontre une des droites, elle est évidemment la somme des espérances mathématiques de différents joueurs recevant 1 franc chaque fois qu'un élément désigné pour chacun d'eux de l'aiguille tombe sur une des droites, or on ne changera l'espérance d'aucun en déformant l'aiguille, en en formant un cercle par exemple et la probabilité pour que la nouvelle courbe rencontre une des droites, multipliée par deux, (puisqu'elle coupe toujours une droite en deux points quand elle la coupe) représentera encore la somme des espérances mathématiques c'est-à-dire la probabilité pour que l'aiguille rectiligne rencontre une des parallèles. Or pour que l'intersection du cercle avec l'une des parallèles ait lieu il faut que (en rapportant le centre O du cercle au milieu I de la perpendiculaire commune aux deux parallèles entre lesquelles O est situé et passant par le point O), la longueur OI soit comprise entre a et $a - \frac{l}{2\pi}$; la probabilité pour que OI soit compris entre ces limites alors qu'il peut varier entre 0 et a est $\frac{\frac{l}{2\pi}}{a}$ et par suite la probabilité pour que l'aiguille rencontre une des parallèles est égale au double de cette valeur c'est-à-dire à $\frac{l}{a\pi}$

Problème de la ruine des joueurs.-

Considérons deux joueurs possédant l'un m francs, l'autre n francs et jouant un jeu équitable, par exemple un jeu où l'enjeu de chaque partie est un franc, la probabilité pour que chacun gagne l'enjeu étant $\frac{1}{2}$ -

On demande quelle est la probabilité pour que l'un d'entre eux ruine l'autre –

La ruine de l'un sera consommée lorsque l'autre possédera $m+n$ francs.

On peut considérer qu'ils jouent un jeu équitable (puisque chaque partie l'est) où l'enjeu est $m+n$ où leurs mises respectives sont m et n, les probabilités qu'ils ont de gagner sont donc P et P' définies par les conditions

$$P\,(m+n) = m$$
$$P'\,(m+n) = n$$

elles sont proportionnelles à leurs fortunes, et celui qui est le plus riche à plus de chances de ruiner l'autre que l'autre de le ruiner –

On peut encore établir ce résultat ainsi –

Il y aura dans la suite des parties une série d'alternatives soit à un certain moment x la fortune de l'un des joueurs A, celle de l'autre B sera $m+n-x$; soit y_x la probabilité pour que le joueur A ruine le joueur B, cela peut se produire de deux manières différentes ou bien A gagnera la partie suivante et la probabilité pour qu'il ruine B deviendra y_{x-1}, ou bien il perdra la partie suivante et la probabilité deviendra y_{x-1} ; ces deux cas étant également probables, on a en raison de la règle des probabilités totales

$$y_x = \frac{1}{2}\, y_{x+1} + \frac{1}{2}\, y_{x-1}$$

ou $$y_x - y_{x-1} = y_{x+1} - y_x$$

Les y successifs sont donc en progression arithmétique, or y_0 est évidemment nul, et y_{m+n} égal à l'unité, la progression est donc

$$0 \quad \frac{1}{m+n} \quad \frac{2}{m+n} \;\cdots\cdots\; \frac{P}{m+n} \;\cdots\cdots\; 1$$

Or les probabilités pour que l'un ou l'autre des joueurs ruine l'autre sont au début y_m et y_n.

C'est-à-dire $\dfrac{m}{m+n}$ et $\dfrac{n}{m+n}$

On retrouve le résultat précédent ; il fait voir qu'un joueur jouant contre un adversaire infiniment

riche est sûr d'être ruiné, c'est le cas d'un joueur qui jouerait contre tout adversaire.

Proposons nous maintenant de chercher quelle est la valeur probable du nombre des parties que devront faire les joueurs pour amener la ruine de l'un d'eux. Considérons comme précédemment le moment où l'un des joueurs possède x francs et l'autre $m+n-x$ et soit y_x la valeur probable du nombre des parties à ce moment ce nombre comprend d'une part la partie qui va être jouée, d'autre part d'un nombre probable de parties égal soit à y_{x+1}, soit à y_{x-1} suivant le résultat de cette partie, les deux hypothèses étant également probables on a

$$y_x = 1 + \frac{1}{2} y_{x+1} + \frac{1}{2} y_{x-1} \quad (1)$$

Il est évident que le nombre y_x déterminé par cette condition contient deux constantes arbitraires; si l'on pose

$$y_x = ax^2 + bx + c$$ et que l'on porte dans (1)

il vient

$$ax^2+bx+c = 1 + \frac{1}{2}\left[a(x+1)^2 + b(x+1) + c\right] + \frac{1}{2}\left[a(x-1)^2 + b(x-1) + c\right]$$

d'où $a = -1$

Donc on peut prendre y_x de la forme

$$y_x = -x^2 + bx + c$$

Pour déterminer b et c je fais successivement $x=0$ et $x = m+n$, y doit s'annuler ce qui donne.

$$c = 0$$

et

$$-(m+n)^2 + b(m+n) = 0$$

c'est-à-dire $(b = (m+n)$; on a donc finalement

$$y_x = x(m+n-x)$$

Au début on a $x = m$ et par suite la valeur probable du nombre des parties est

$$y_m = mn$$

Donc le joueur qui joue contre un adversaire infiniment riche ne serait ruiné qu'au bout d'un nombre infini de parties.

Il ne faut pas croire que cette affirmation soit

contraire à la précédente, à savoir qu'il est sûr d'être ruiné. En effet dire que la ruine du joueur est certaine et que la valeur probable du nombre des parties est infinie, c'est à dire que la probabilité pour qu'il ne soit pas ruiné au bout de P parties est aussi petite que l'on veut pourvu que l'on prenne P suffisamment grand.

On peut d'ailleurs démontrer à priori que si l'on admet que la ruine de l'un des joueurs est certaine la valeur probable du nombre des parties est infinie.

En effet soit deux joueurs possédant chacun m francs et jouant un jeu équitable jusqu'à la ruine de l'un d'eux, soit $\varphi(m)$ la valeur probable du nombre des parties ; soit de même $\varphi(2m)$ la valeur probable du nombre des parties lorsque les deux joueurs ont primitivement chacun $2m$ francs.

Il existe une relation simple entre $\varphi(m)$ et $\varphi(2m)$; en effet on peut imaginer que chacun divise sa fortune en deux parts égales ; lorsque l'un aura perdu l'une des parts, si les joueurs continuent il y a deux hypothèses également probables, ou le même perdra une deuxième fois la somme m et il sera ruiné, ou bien il la regagnera et le jeu recommencera comme au début la valeur probable du nombre des parties faites est évidemment $2\varphi(m)$, et celle du nombre des parties qu'il reste à faire pour amener la ruine de l'un des joueurs est soit 0 soit $\varphi(2m)$

on a donc

$$\varphi(2m) = 2\varphi(m) + \frac{1}{2}\varphi(2m)$$

ou $\quad \varphi(2m) = 4\varphi(m)$

Considérons maintenant un joueur possédant une fortune de m francs et jouant contre le public qui peut être considéré comme possédant une fortune composée d'un nombre infini de fois m francs.

Au bout d'une première série de parties dont le nombre probable a pour valeur $\varphi(m)$ ou le joueur est ruiné ou il possède une somme $2m$; dans cette dernière hypothèse dont la probabilité est $\frac{1}{2}$ nous considérons une série de parties dont le nombre probable a pour valeur $\varphi(2m)$ au bout desquelles le joueur sera ruiné ou possèdera $4m$, cette dernière

hypothèse a pour probabilité $\frac{1}{4}$ et entraînerait un nombre de parties dont la valeur probable est au moins $\varphi(4m)$ et ainsi de suite.

On a donc pour la valeur probable des parties à jouer

$$N = \varphi(m) + \frac{1}{2}\varphi(2m) + \frac{1}{4}\varphi(4m) + \frac{1}{8}\varphi(8m)$$

or $\varphi(2m) = 4\varphi(m)$

$$\varphi(4m) = 4\varphi(2m) = 16\varphi(m) \quad \text{etc....}$$

Donc $N = \varphi(m)(1+2+4+8 \ldots\ldots\ldots)$

Ce nombre est infini quelque soit $\varphi(m)$

Théorèmes relatifs aux moyennes.

Considérons un événement incertain pouvant arriver de différentes manières ; et supposons que l'on fasse n épreuves, soit λ_1, λ_2 ..... λ_n les nombres fournis par ces épreuves, P_1 P_2 ..... P_n les probabilités pour que chacun de ces n nombres se présente.

L'espérance mathémathique de celui qui à chaque épreuve recevrait une somme représentée par le nombre λ est évidemment

$$G = P_1\lambda_1 + P_2\lambda_2 \ldots\ldots\ldots\ldots + P_n\lambda_n$$

Supposons maintenant que l'on fasse μ séries de n épreuves donnant pour le nombre G les différentes valeurs x_1, x_2 ...... x_μ et considérons la moyenne

$$\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots\ldots + x_\mu}{\mu}$$

La différence entre cette moyenne et le nombre G tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment, c'est-à-dire encore que la probabilité pour que la différence entre G et cette moyenne soit plus petite qu'un nombre ε tend vers 1 lorsque μ augmente indéfiniment.

Pour le démontrer je considère la valeur probable du carré de la différence —

Soit ce carré

$$\left(\frac{x_1+x_2 \ldots\ldots\ldots + x_\mu}{\mu} - G^2\right) = \frac{\Sigma x_i^2 + 2\Sigma x_i x_j}{\mu^2} - 2G\Sigma\frac{x_i}{\mu} + G^2$$

La valeur probable de cette somme est la somme des valeurs probables des différents termes

La valeur probable de Σx_i^2 est égale à μ que multiplié la valeur probable de x_i^2, laquelle est égale à

$$P_1\lambda_1^2 + P_2\lambda_2^2 \ldots\ldots + P_n\lambda_n^2 = H$$

Le deuxième terme $\Sigma x_i x_j$ contient $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ termes, sa valeur probable est égale à $\frac{\mu(\mu-1)}{2}$ multiplié par la valeur probable de $x_i x_j$, or cette valeur probable est égale à la somme des produits d'une valeur $\lambda_i\lambda_j$ du terme considéré par sa probabilité $P_i P_j$ c'est-à-dire à $\Sigma P_i P_j \lambda_i \lambda_j = \Sigma P_i \lambda_i \Sigma P_j \lambda_j = G^2$

la valeur probable de Σx_i est G ; on a donc pour la valeur probable du carré de la différence considérée

$$\frac{\mu H + \mu(\mu-1)G^2}{\mu^2} - 2\frac{G^2}{\mu} + G^2 = \frac{H - G^2}{\mu}$$

Quels que soient H et G cette différence divisée par μ tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment.

Si nous désignons par x la probabilité pour que cette expression dépasse α, le produit αx est un terme de la valeur probable de l'expression ; comme cette expression tend vers 0 et que tous les termes sont positifs, αx tend vers 0 à fortiori.

34e Leçon.

Application du calcul des moyennes.- Problème du jeu non équitable-Théorème de Bernouilli- Problème de St Pétersbourg.

Jeu non équitable.- Soit deux joueurs A et B mettant des



mises a et b et soit P et q les probabilités respectives pour que l'un ou l'autre gagne; les deux joueurs jouant l'un contre l'autre au bout de la première partie A peut avoir gagné la mise b, son espérance mathématique relative à cette mise est Pb; il peut aussi perdre a, l'espérance mathématique qui correspond à cette hypothèse est $-qa$ et par suite l'espérance mathématique du joueur A est

$$G = Pb - qa$$

Si le jeu est équitable on doit avoir $G = 0$, les mises doivent être proportionnelles aux chances des joueurs.

La quantité H que nous avons considérée précédemment (valeur probable du carré) est ici

$$H = Pb^2 + qa^2$$

Si nous désignons par $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_\mu$ les gains du joueur A dans μ parties successives, nous avons vu que l'expression $\left(\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_\mu}{\mu} - G\right)^2$ tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment et sa valeur probable est $\frac{H - G^2}{\mu} = \frac{Pb^2 + qa^2 - (Pb - qa)^2}{\mu}$

Ceci est encore égal à $\frac{Pq(a+b)^2}{\mu}$ comme on le constate aisément en développant et remarquant que $P+q=1$

Si d'ailleurs je pose $X = x_1 + x_2 \ldots + x_n$ (X représentant le gain total), on voit que si l'on désigne par $\mathcal{E}^2$ la valeur probable de $\left(\frac{X}{\mu} - G\right)^2$, elle est égale à $\frac{Pq(a+b)^2}{\mu}$

D'autre part on aura $\frac{X}{\mu} = G \pm \mathcal{E}$

c'est-à-dire que le gain moyen se compose d'une quantité fixe, qui est l'avantage fait au joueur considéré, et d'une quantité variable positive ou négative dont la valeur est réglée par le hasard, cependant la valeur probable de cette quantité variable est aussi petite que l'on veut lorsque μ augmente indéfiniment; au bout de μ parties le gain est μG

à une quantité près qui est négligeable par rapport à μG lorsque μ augmente indéfiniment.

La partie principale du gain est donc acquise à priori.

Théorème de Bernouilli.-

Considérons le cas général de deux événements contraires de probabilités p et q, si l'on fait μ épreuves chacun des deux événements peut arriver jusqu'à μ fois, mais nous avons vu que la probabilité pour que le premier arrive n fois et le second $\mu-n$ fois est représentée par l'un des termes du développement de

$$(p+q)^\mu = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q \cdots + \frac{1.2.\ldots.\mu}{1.2\ldots n . 1.2 \ldots \mu-n} p^n q^{\mu-n} \cdots + \frac{1.2\ldots\mu}{1.2\ldots p\mu . 1.2 \ldots q\mu} p^{p\mu} q^{q\mu} \cdots + q^\mu$$

en mettant en évidence la probabilité de la distribution la plus probable des événements.

Si nous considérons deux joueurs tels que la probabilité pour que le premier gagne soit p, et pour le 2e q et dont les mises sont respectivement égales à p et q le jeu est équitable, la valeur probable du gain de chacun est nulle, et sur μ parties ce qui est le plus probable est que le premier gagne μp fois la somme q et que le deuxième gagne μq fois la somme p.

Si il y a un écart d'une unité entre le nombre qui se présente et ce nombre probable de gains et de pertes, en faveur du premier joueur par exemple, son gain au bout des μ parties sera $p+q$ c'est-à-dire 1, car à l'une des parties il aura gagné q au lieu de perdre p; et il gagnera autant de fois un qu'il y aura d'unités dans le nombre d'écarts - Si donc n est le nombre des parties qu'il a gagnées, le nombre des écarts sera

$$Z = n - p\mu$$

et il représentera son gain total, son gain moyen sera $\frac{Z}{\mu}$, dont le carré a pour valeur probable

$$\frac{pq\,(p+q)^2}{\mu} = \frac{pq}{\mu}$$

mises a et b et soit P et q les probabilités respectives pour que l'un ou l'autre gagne ; les deux joueurs jouant l'un contre l'autre au bout de la première partie A peut avoir gagné la mise b, son espérance mathématique relative à cette mise est Pb ; il peut aussi perdre a, l'espérance mathématique qui correspond à cette hypothèse est $-qa$ et par suite l'espérance mathématique du joueur A est

$$G = Pb - qa$$

Si le jeu est équitable on doit avoir $G = 0$, les mises doivent être proportionnelles aux chances des joueurs.

La quantité H que nous avons considérée précédemment (valeur probable du carré) est ici

$$H = Pb^2 + qa^2$$

Si nous désignons par $x_1\ x_2 \ldots\ldots x_\mu$ les gains du joueur A dans μ parties successives, nous avons vu que l'expression $\left(\frac{x_1 + x_2 \ldots\ldots + x_\mu}{\mu} - G\right)^2$ tend vers 0 lorsque μ augmente indéfiniment et sa valeur probable est $\frac{H - G^2}{\mu} = \frac{Pb^2 + qa^2 - (Pb - qa)^2}{\mu}$

Ceci est encore égal à $\frac{Pq\,(a+b)^2}{\mu}$ comme on le constate aisément en développant et remarquant que $P + q = 1$

Si d'ailleurs je pose $X = x_1 + x_2 \ldots + x_n$ (X représentant le gain total), on voit que si l'on désigne par $\mathcal{E}^2$ la valeur probable de $\left(\frac{X}{\mu} - G\right)^2$, elle est égale à $\frac{Pq\,(a+b)^2}{\mu}$

D'autre part on aura $\frac{X}{\mu} = G \pm \mathcal{E}$

c'est-à-dire que le gain moyen se compose d'une quantité fixe, qui est l'avantage fait au joueur considéré ; et d'une quantité variable positive ou négative dont la valeur est réglée par le hasard, cependant la valeur probable de cette quantité variable est aussi petite que l'on veut lorsque μ augmente indéfiniment ; au bout de μ parties le gain est μG

à une quantité près qui est négligeable par rapport à μG lorsque μ augmente indéfiniment.

La partie principale du gain est donc acquise à priori

Théorème de Bernouilli.-

Considérons le cas général de deux événements contraires de probabilités p et q, si l'on fait μ épreuves chacun des deux événements peut arriver jusqu'à μ fois, mais nous avons vu que la probabilité pour que le premier arrive n fois et le second $\mu - n$ fois est représentée par l'un des termes du développement de

$$(p+q)^\mu = p^\mu + \mu p^{\mu-1} q \cdots + \frac{1.2.\cdots\mu}{1.2\cdots n . 1.2 \cdots \mu-n} p^n q^{\mu-n} \cdots + \frac{1.2\cdots\mu}{1.2\cdots p\mu . 1.2\cdots q\mu} p^{p\mu} q^{q\mu} \cdots +$$

en mettant en évidence la probabilité de la distribution la plus probable des événements.

Si nous considérons deux joueurs tels que la probabilité pour que le premier gagne soit p, et pour le 2e q et dont les mises sont respectivement égales à p et q le jeu est équitable, la valeur probable du gain de chacun est nulle, et sur μ parties ce qui est le plus probable est que le premier gagne μp fois la somme q et que le deuxième gagne μq fois la somme p.

Si il y a un écart d'une unité entre le nombre qui se présente et ce nombre probable de gains et de pertes, en faveur du premier joueur par exemple, son gain au bout des μ parties sera $p+q$ c'est-à-dire 1, car à l'une des parties il aura gagné q au lieu de perdre p; et il gagnera autant de fois un qu'il y aura d'unités dans le nombre d'écarts - Si donc n est le nombre des parties qu'il a gagnées, le nombre des écarts sera

$$Z = n - p\mu$$

et il représentera son gain total, son gain moyen sera $\frac{Z}{\mu}$, dont le carré a pour valeur probable

$$\frac{pq\,(p+q)^2}{\mu} = \frac{pq}{\mu}$$

La valeur probable de $\frac{z^2}{\mu^2}$ est donc $\frac{pq}{\mu}$ et celle des z^2 sera $pq\mu$

On voit donc que le gain moyen $\frac{z}{\mu}$ sera très petit si μ est très grand puisque sa valeur probable est en raison inverse de $\sqrt{\mu}$. —

Si l'on cherche la valeur probable du gain total au bout de K séries de μ parties on trouve 0 si l'on prend les éléments de la somme alternativement avec le signe + et le signe − comme cela est évident à priori ; mais nous pouvons nous proposer de chercher la valeur probable de la valeur absolue du gain. — Nous distinguerons pour cela les gains positifs et négatifs, si l'on suppose d'abord le nombre n des parties gagnées supérieur à $p\mu$ les valeurs du gain z correspondantes sont positives —

Si nous nous donnons une valeur de n, le bénéfice correspondant sera $n - p\mu$, le multipliant par la probabilité pour que ce cas se présente, laquelle est représentée par $\frac{1.2 \ldots\ldots \mu}{1.2 \ldots p\mu . 1.2 \ldots q.\mu} p^n q^{\mu-n}$, on obtient un terme de la valeur probable considérée —

Or nous pouvons écrire

$$n - p\mu = nq - p(\mu - n) = pq\left(\frac{n}{p} - \frac{\mu - n}{q}\right)$$

Nous aurons donc le terme

$$\frac{1.2 \ldots\ldots \mu}{1.2 \ldots p\mu \ldots 1.2 \ldots q\mu} p^n q^{\mu-n} \times \left[pq - \frac{\mu - n}{q}\right]$$

il est déduit de l'un des termes du développement de $(p+q)^\mu$ en le dérivant par rapport à p puis par rapport à q faisant la différence de ces dérivées et multipliant par pq.

Or si l'on prend successivement les différents termes de $(p+q)^\mu$ jusqu'au terme maximum $(n > p\mu)$ les termes des dérivées se détruisent deux à deux, et il reste seulement pour la somme le dernier terme :

$$\frac{1.2 \ldots\ldots \mu}{1.2 \ldots \mu p . 1.2 \ldots \mu q} p\mu \, p^{p\mu - 1} q^{q\mu} \times pq$$

$$= \mu pq \frac{1.2 \ldots\ldots \mu}{1.2 \ldots \mu p \, 1.2 \ldots \mu q} p^{p\mu} q^{q\mu}$$

Ceci est égal à $\mu p q$ que multiplie le terme maximum du développement de $(p+q)^{\mu}$, lequel a pour valeur approchée

$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$ lorsque μ est très grand.

Ce qui donne pour la valeur probable cherchée

$$\frac{\mu pq}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$$

Si l'on considère maintenant la valeur probable des écarts négatifs z, le calcul est identique et d'ailleurs il est évident à priori que le résultat doit être le même. (On a donc pour la valeur probable de z (en prenant les valeurs absolues $z_1\, z_2 \dots z_k$ des gains)

$\frac{2\mu pq}{\sqrt{2\pi\mu pq}}$ valeur de la moyenne $\frac{z_1+z_2 \dots\dots +z_k}{k}$

D'ailleurs la valeur probable de z^2 qui représente le quotient $\frac{z_1^2+z_2^2 \dots\dots +z_k^2}{k}$ est $H = \mu pq$

On a donc en faisant le quotient

$$\frac{\frac{z_1^2+z_2^2 \dots\dots z_k^2}{k}}{\left(\frac{z_1+z_2 \dots\dots +z_k}{k}\right)^2}$$ qui a pour valeur probable $\frac{\pi}{2}$

Donc si on fait un grand nombre k de groupes de μ parties et que l'on note les gains $z_1\, z_2 \dots\dots z_k$ de l'un ou l'autre des joueurs le quotient précédent diffèrera très peu $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire encore que de toutes les éventualités possibles celles qui donnent pour ce quotient un nombre très voisin de $\frac{\pi}{2}$ sont infiniment plus nombreuses que les autres.

Ce théorème est dû à Bernouilli.

La démonstration précédente n'est pas complète, elle ne donne pas la mesure de la probabilité pour que l'on obtienne $\frac{\pi}{2}$

Problème de St Pétersbourg.

Soit deux joueurs Pierre et Paul Pierre jette une pièce et doit payer 1 franc à Paul s'il amène pile au premier coup, deux francs s'il n'amène pile qu'au deuxième coup, 4 au 3e ..... et 2^{n-1} francs s'il n'amène pile qu'au $n^{ième}$ coup. On propose de déterminer quelle est la somme

que Paul doit donner à Pierre à chacune des parties pour que le jeu soit équitable.

La somme que Paul doit donner est égale à son espérance mathématique, or celle ci est représentée par la somme des produits du nombre de francs qu'il touche dans chaque cas par la probabilité pour que ce cas se présente elle est donc égale à

$$1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4 \cdots\cdots \frac{1}{2^n}\, 2^n \cdots\cdots\cdots$$

c'est-à-dire qu'elle est infinie. Donc Paul devrait pour chacune des parties payer une somme infiniment grande à Pierre, ou encore quelle que soit la somme qu'il paye le jeu lui serait avantageux.

Tel est le résultat du calcul, il paraît absurde, et pendant longtemps on a cherché à mettre en défaut le raisonnement fait. Celui-ci est cependant exact, mais le résultat qu'il fournit n'a de sens que si l'on suppose un nombre excessivement grand de parties successives. Quelle que soit la somme que Paul paye à chaque partie, pour un nombre de parties suffisamment grand, il peut espérer voir sortir face un nombre de fois successifs tel que la puissance de 2 correspondante soit tellement considérable qu'elle dépasse encore de beaucoup les sommes qu'il a payées à Pierre.

Le théorème de Bernouilli que nous venons de démontrer peut l'être d'une manière plus complète en s'appuyant sur les formules que nous allons établir.

Si l'on considère deux événements contraires de probabilités p et q, et que l'on fait μ expériences, le cas le plus probable est que l'on ait μp événement d'un côté, μq de l'autre (nous supposons μ très considérable et μp et μq entiers) la probabilité de ce cas est

$$\frac{1.2\cdots\cdots\mu}{1.2\cdots p\mu \cdot\cdot 1.2\cdots q\mu}\, p^{p\mu}\, q^{q\mu}$$

Si nous considérons le cas où il y a z événements du premier genre de plus, il a pour probabilité.

$$\varphi(z)=\frac{1.2\cdots\cdots\mu}{1.2\cdots(p\mu+z)\,1.2\cdots(q\mu-z)}\, p^{p\mu+z}\, q^{q\mu-z}$$

Le calcul exact de cette probabilité est très-compliqué, dans le cas où μ est grand ; mais on peut en obtenir une valeur approchée ainsi qu'il suit.

Si l'on calcule le quotient

$$\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} \text{ il est égal à}$$

$$\frac{p}{q}\,\frac{(q\mu-z)}{(p\mu+z+1)} = \frac{1-\frac{z}{\mu q}}{1+\frac{z+1}{\mu p}} \quad (1)$$

Mais le calcul de la valeur de $\varphi(z)$ n'a besoin d'être fait exactement que pour les valeurs de z très-petites par rapport à μ, car sitôt que z devient un peu grand $\varphi(z)$ devient pratiquement nul ; je suppose donc $\frac{z}{\mu}$ très-petit et je remplace le quotient (1) qui est de la forme

$$\frac{1-\alpha}{1+\beta} \text{ par } 1-\alpha-\beta$$

il vient donc

$$\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = 1-\frac{z}{\mu q}-\frac{z+1}{\mu p} = 1-\frac{z}{\mu q}-\frac{z}{\mu p}-\frac{1}{\mu p} \quad (2)$$

D'ailleurs comme $\frac{1}{\mu q}+\frac{1}{\mu p}=\frac{p+q}{\mu p q}=\frac{1}{\mu p q}$

l'équation (2) s'écrit encore

$$\frac{\varphi(z+1)-\varphi(z)}{\varphi z} = -\frac{z}{\mu p q}-\frac{1}{\mu p}$$

La fonction $\varphi(z)$ n'a été définie que pour les valeurs entières de z, c'est-à-dire que l'on a dans un plan une série de points sur des ordonnées successives. Imaginons qu'on les réunisse par une courbe continue qui représentera la fonction $\varphi(z)$ et supposons que sa dérivée peut être représentée par $\varphi'(z)=\varphi(z+1)-\varphi(z)$ comme nous l'avons déjà fait (cours de 2e année P36 note) ce qui est sensiblement exact pour des valeurs de z considérables (bien que petites par rapport à μ) — Nous poserons donc

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{-z}{\mu p q}-\frac{1}{\mu p}$$

Intégrant il vient

que Paul doit donner à Pierre à chacune des parties pour que le jeu soit équitable.

La somme que Paul doit donner est égale à son espérance mathématique, or celle ci est représentée par la somme des produits du nombre de francs qu'il touche dans chaque cas par la probabilité pour que ce cas se présente elle est donc égale à

$$1+\frac{1}{2}\times 2+\frac{1}{4}\times 4 \cdots\cdots \frac{1}{2^n}\, 2^n \cdots\cdots\cdots\cdots$$

c'est-à-dire qu'elle est infinie — Donc Paul devrait pour chacune des parties payer une somme infiniment grande à Pierre, ou encore quelle que soit la somme qu'il paye le jeu lui serait avantageux.

Tel est le résultat du calcul, il paraît absurde, et pendant longtemps on a cherché à mettre en défaut le raisonnement fait — Celui-ci est cependant exact, mais le résultat qu'il fournit n'a de sens que si l'on suppose un nombre excessivement grand de parties successives — Quelle que soit la somme que Paul paye à chaque partie, pour un nombre de parties suffisamment grand, il peut espérer voir sortir face un nombre de fois successifs tel que la puissance de 2 correspondante soit tellement considérable qu'elle dépasse encore de beaucoup les sommes qu'il a payées à Pierre —

Le théorème de Bernouilli que nous venons de démontrer peut l'être d'une manière plus complète en s'appuyant sur les formules que nous allons établir.

Si l'on considère deux événements contraires de probabilités p et q, et que l'on fait μ expériences, le cas le plus probable et que l'on ait μp événement d'un côté, μq de l'autre (nous supposons μ très-considérable et μp et μq entiers) la probabilité de ce cas est

$$\frac{1.2\cdots\cdots\mu}{1.2\cdots p\mu\cdot\cdot 1.2\cdots\cdot q\mu}\, p^{p\mu}\, q^{q\mu}$$

Si nous considérons le cas où il y a z événements du premier genre de plus, il a pour probabilité.

$$\varphi(z)=\frac{1.2\cdots\cdots\mu}{1.2\cdots\cdot(p\mu+z)\,1.2\cdots\cdot(q\mu-z)}\, p^{p\mu+z}\, q^{q\mu-z}$$

Le calcul exact de cette probabilité est très-compliqué, dans le cas où μ est grand; mais on peut en obtenir une valeur approchée ainsi qu'il suit.

Si l'on calcule le quotient

$$\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)}$$ il est égal à

$$\frac{p}{q}\frac{(q\mu-z)}{(p\mu+z+1)} = \frac{1-\frac{z}{\mu q}}{1+\frac{z+1}{\mu p}} \quad (1)$$

Mais le calcul de la valeur de $\varphi(z)$ n'a besoin d'être fait exactement que pour les valeurs de z très-petites par rapport à μ, car sitôt que z devient un peu grand $\varphi(z)$ devient pratiquement nul; je suppose donc $\frac{z}{\mu}$ très-petit et je remplace le quotient (1) qui est de la forme

$$\frac{1-\alpha}{1+\beta} \text{ par } 1-\alpha-\beta$$

il vient donc

$$\frac{\varphi(z+1)}{\varphi(z)} = 1-\frac{z}{\mu q}-\frac{z+1}{\mu p} = 1-\frac{z}{\mu q}\,\frac{z}{\mu p}-\frac{1}{\mu p} \quad (2)$$

D'ailleurs comme $\frac{1}{\mu q}+\frac{1}{\mu p} = \frac{p+q}{\mu p q} = \frac{1}{\mu p q}$

l'équation (2) s'écrit encore

$$\frac{\varphi(z+1)-\varphi(z)}{\varphi z} = -\frac{z}{\mu p q}-\frac{1}{\mu p}$$

La fonction $\varphi(z)$ n'a été définie que pour les valeurs entières de z, c'est-à-dire que l'on a dans un plan une série de points sur des ordonnées successives. Imaginons qu'on les réunisse par une courbe continue qui représentera la fonction $\varphi(z)$ et supposons que sa dérivée peut être représentée par $\varphi'(z) = \varphi(z+1)-\varphi(z)$ comme nous l'avons déjà fait (cours de 2e année P 36 note) ce qui est sensiblement exact pour des valeurs de z considérables (bien que petites par rapport à μ) — Nous poserons donc

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{-z}{\mu p q}-\frac{1}{\mu p}$$

Intégrant il vient

$$L\,\varphi(z) = \frac{-z^2}{2\mu p q} - \frac{z}{\mu p} + L\,G$$

d'où

$$\varphi(z) = G e^{\frac{-z^2}{2\mu p q}} e^{\frac{-z}{\mu p}}$$

Mais $e^{\frac{-z}{\mu p}}$ est beaucoup plus voisin de l'unité que $e^{\frac{-z^2}{2\mu p q}}$ lorsque z est un peu grand tout en étant très petit par rapport à μ

D'ailleurs la valeur de G est $\varphi(0)$ c'est donc le terme maximum du développement de $(p+q)^\mu$ qui a pour valeur approchée, lorsque μ est très grand $\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}$

On a donc comme expression approchée de $\varphi(z)$

$$\varphi z = \frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}} e^{\frac{-z^2}{2\mu p q}}$$

Cette formule n'est qu'approchée, elle ne devrait s'appliquer (d'après la manière dont nous l'avons établie) qu'au cas où z est entier et inférieur ou égal à μp ; et même nous ne pouvons pas affirmer qu'elle soit juste pour des valeurs de z comparables à μ puisque nous avons dans le calcul supposé $\frac{z}{\mu}$ très petit.

Cependant nous la prendrons pour des valeurs μ voisines de μp et même supérieures, parce que sitôt que z est comparable à μ la probabilité devient extrêmement petite, elle devient même nulle lorsque z dépasse μp ; mais comme d'autre part la fonction $\varphi(z)$ que nous venons de déterminer prend des valeurs extrêmement petites l'erreur est négligeable.

35e Leçon

Application de la formule relative à la probabilité d'un écart z – Théorème de Bernouilli – Probabilité à posteriori.

Application de la formule précédente. – Nous avons

dit que nous étendrions la formule qui fait connaître la probabilité d'un écart z au cas d'une valeur quelconque de z comprise entre $-\infty$ et $+\infty$; nous considérerons même des valeurs fractionnaires de z quoique cela n'ait pas de signification au point de vue du problème proposé, et au lieu de représenter par des nombres finis les probabilités pour que l'écart soit égal à un nombre entier ou à un autre nous représenterons par l'intégrale

$\int_a^b \varphi(z)\,dz$ la probabilité pour que l'écart soit compris entre deux nombres a et b. —

Dans ces conditions la probabilité pour que l'écart soit compris entre $-\infty$ et $+\infty$ étant une certitude nous devrons avoir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z)\,dz = 1$$

c'est-à-dire

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\mu p q}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2\mu p q}}\,dz = 1$$

posant $K^2 = \dfrac{1}{2\mu p q}$; il vient à vérifier

$$\frac{K}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K^2 z^2}\,dz = 1$$

Ce qui résulte immédiatement des résultats établis précédemment (Cours de 2e année p 16)

Si nous cherchons maintenant la valeur probable de l'écart z pris en valeur absolue, en partant de cette expression de $\varphi(z)$, il vient pour cette valeur probable la somme des produits des écarts par leurs probabilités respectives.

$$2\int_0^{\infty} z\,\varphi(z)\,dz = \frac{2K}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-K^2 z^2} z\,dz = \frac{-1}{K\sqrt{\pi}}\Big[e^{-K^2 z^2}\Big]_0^{\infty} = \frac{1}{K\sqrt{\pi}}$$

remplaçant K par sa valeur on retrouve l'expression connue

$$\frac{\sqrt{2\mu p q}}{\sqrt{\pi}}$$

Nous trouverons de la même manière la valeur probable du carré de l'écart

$$\int_{-\infty}^{+\infty} z^2 \varphi(z)\,dz = \frac{K}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-K^2z^2} z^2\,dz$$

il vient en intégrant par parties (voir cours de 2ème année P16) la valeur de l'intégrale.

$$\frac{1}{2K^2} = \mu p q$$

Ces exemples où, en prenant l'expression approchée de $\varphi(z)$ comme exacte, nous retrouvons des résultats établis directement, montrent qu'elle est suffisamment approchée.

Théorème de Bernouilli.- Cette formule nous permet immédiatement de retrouver le théorème de Bernouilli. Etant donné deux événements contraires de probabilités p et q, si l'on fait μ épreuves les nombres d'événements les plus probables sont μp pour le premier μq pour le 2e; cherchons la probabilité pour que l'écart entre ces nombres et les nombres observés soit plus petit que α, cette probabilité est d'après ce qui précède égale à l'intégrale

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \varphi(z)\,dz = \frac{K}{\sqrt{\pi}}\int_{-\alpha}^{+\alpha} e^{-K^2z^2}\,dz \text{ en posant } K = \frac{1}{\sqrt{2\mu p q}}$$

posant $Kz = t$ cette intégrale devient

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{K\alpha} e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{\alpha}{\sqrt{2\mu p q}}} e^{-t^2}\,dt$$

Cette intégrale est une certaine fonction de sa limite supérieure dont on a construit des tables, elle tend très vite vers l'unité lorsque la limite supérieure augmente, si je désigne par Θ cette fonction de la limite supérieure j'aurai

$$\Theta(1) = 0,8427$$

$$\Theta(1,5) = 0,966$$

$$\Theta(2) = 0,9953$$

$$\Theta(2.50) = 0{,}99959$$

$$\Theta(3) = 0{,}999956$$

$$\Theta(4.8) = 0{,}99999$$

Pour que l'intégrale précédente augmente il suffit que $\frac{\alpha}{\sqrt{\mu}}$ augmente ; ce qui montre qu'il suffit que α soit multiplié par 10 lorsque le nombre μ des épreuves est multiplié par 100.

Ceci explique la certitude du gain du banquier au jeu de la roulette ; il se réserve $\frac{1}{36}$ des coups, c'est-à-dire que sur 20000 coups, il s'en réserve un nombre dont la valeur probable est un peu supérieure à 550 ; mais sur ce nombre de 20000 coups il est certain que l'écart α ne dépassera pas 480 à peu près il est donc certain d'avoir au moins 70 coups pour lui.

Si l'on augmente le nombre des coups en le multipliant par 100 par exemple, le nombre probable des coups qu'il se réserve est multiplié aussi par 100 et celui des écarts possibles seulement par 10 le nombre des gains assurés est donc considérablement augmenté il augmente beaucoup plus vite que proportionnellement au nombre total des coups.

Probabilité à postériori.-

Après qu'un événement s'est produit un certain nombre de fois, alors que l'on pouvait tout aussi bien attendre l'événement contraire on peut en conclure qu'il devait être plus probable que l'autre.

Si par exemple on extrait des boules d'une urne contenant des blanches et des noires, et que l'on tire dix blanches successives, puis seulement une noire à la onzième épreuve on sera conduit à penser que l'urne contient plus de blanches que de noires et par suite dans des épreuves futures il est probable que l'on tirera un plus grand nombre de blanches que de noires.

Problème.- Lorsqu'un événement peut être produit par plusieurs causes différentes et qu'il s'est produit, quelle est la probabilité pour qu'il soit dû à l'une plutôt qu'à l'autre.

Soit par exemple deux urnes l'une contenant mille noires et une blanche et l'autre mille blanches et une noire. On tire au hasard une boule qui se trouve être blanche, il est évidemment beaucoup plus probable qu'elle a été extraite de la deuxième urne plutôt que de la première.

Pour aborder le problème dans le cas le plus général considérons les causes qui peuvent amener la production de l'événement soit $\varpi_1, \varpi_2 \ldots\ldots \varpi_n$ les probabilités de ces diverses causes. Lorsque l'une de ces causes s'est produite elle n'entraîne pas nécessairement la production de l'événement considéré soit $P_1, P_2 \ldots P_n$ les diverses probabilités de l'événement considéré lorsque l'on suppose que l'une ou l'autre des n causes s'est produite.

On demande quelle est la probabilité x pour que l'événement attendu qu'on suppose arrivé soit dû à la cause.

Pour l'évaluer je calcule de deux manières la probabilité pour que la cause i produise l'événement ; elle est d'une part $P_i \varpi_i$; elle est d'autre part égale à la probabilité totale pour que l'événement se produise, multipliée par cette probabilité inconnue x.

On a donc

$$\left(P_1\varpi_1 + P_2\varpi_2 \cdots\cdots + P_n\varpi_n\right) x = P_i \varpi_i$$

D'où $$x = \frac{P_i \varpi_i}{P_1\varpi_1 + P_2\varpi_2 \cdots\cdots + P_n\varpi_n}$$

la probabilité cherchée est proportionnelle à la probabilité à priori de la cause et à la probabilité pour que la cause produise l'effet considéré.

Applications. — On a fait fréquemment des applications de ce principe mais elles ne sont légitimes que lorsque l'on peut connaître la probabilité ϖ_i, souvent on l'a supposée constante (c'est-à-dire égale à $\varpi_1, \varpi_2 \ldots\ldots \varpi_n$) sans raisons. Tel est l'exemple suivant.

Buffon ayant jeté en l'air 2042 fois une pièce de monnaie a trouvé 1042 fois face et 1000 fois pile. Poisson s'est demandé si la pièce qui avait fourni un écart aussi considérable était bonne ; il a fait le calcul et a trouvé une probabilité $\frac{82}{100}$ pour que la pièce fut mauvaise. Son calcul n'est pas légitime car il a supposé

que les probabilités ϖ_1 et ϖ_2 des deux causes possibles (pièce bonne et pièce mauvaise) étaient égales ce qui n'est évidemment pas légitime, car une pièce prise au hasard est le plus souvent bonne.

Problème.- Étant donné une urne contenant des boules blanches et des noires on y puise $m+n$ boules successivement que l'on remet après les avoir puisées, si l'on a tiré m blanches et n noires, on demande quelle est la probabilité pour que l'on tire une blanche au $(m+n+1)^{ième}$ coup.

Soit x le rapport du nombre des blanches aux noires dans l'urne.

La probabilité pour tirer m blanches et n noires sur $(m+n)$ épreuves dans une telle urne est $x^m(1-x)^n$; c'est le terme P_i de la formule précédente.

La probabilité pour que le résultat obtenu soit dû à une telle composition de l'urne est

$$G\,x^m(1-x)^n\,dx$$

Or la somme de ces probabilités pour toutes les compositions possibles de l'urne ; c'est-à-dire pour toutes les valeurs de x comprises entre 0 et 1 doit être la certitude on aura donc

$$G\int_0^1 x^m(1-x)^n\,dx = 1$$

Mais d'après les formules établies précédemment (cours de 2e année p)on a

$$\int_0^1 (1-x)^n x^m\,dx = \frac{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}$$

Donc la probabilité pour que l'on ait la composition x

est $$\frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}\,x^m(1-x)^n\,dx.$$

La probabilité pour que l'on obtienne une blanche à la $(m+n+1)^{ième}$ épreuve est la somme des produits des probabilités pour l'obtenir avec chaque composition de l'urne, par la probabilité de cette composition, c'est donc

$$\int_0^1 \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}\,x^{m+1}(1-x)^n\,dx = \frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(n+1)}\,\frac{\Gamma(m+2)\,\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+3)} = \frac{m+1}{m+n+1}$$

Telle est la probabilité cherchée.

Fin

